

**Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»**

А.В. Бойко

Гидрогазодинамика

**Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений, которые обучаются по
направлению "Энергетика".**

Харьков 2006

ББК 253.3 я 73

Б–77

УДК [532.5:533.1](075.8)

Рецензенти: *Е.Г. Братута*, д.т.н., проф., НТУ «ХП»,
В.П. Герасименко, д.т.н., проф., Національний аерокосмічний
університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
В.І. Гнесін, д.т.н., проф., Лауреат Державної премії України в
галузі науки і техніки, Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
Г.М. Любчик, д.т.н., проф., Національний технічний університет
України «КПІ».

Гриф наданий Міністерством освіти і науки України,
лист № 14/18.2-66 від 19.01.2006 р.

Б–77 **Бойко А.В.** Гідрогазодинаміка: Навчальний посібник. – Харків:
НТУ «ХП», 2006. – 413 с. – На рос. мові.

ISBN

Викладені основні закони і рівняння руху рідини. Описані закономірності одномірного, дво- і трьохмірного руху нестисливої, стисливої до- та зверхзвукової течії. Подані основні поняття теорії подібності. Висвітлені основи теорії приграничного шару і процеси, які проходять при витіканні газу з сопел і решіток турбомашин.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів, які навчаються за напрямом енергетики.

Излагаются основные законы и уравнения движения жидкости. Описаны закономерности одномерного, двух- и трёхмерного движения несжимаемого, сжимаемого, до- и сверхзвукового течения. Даны основные понятия о теории подобия. Освещены основы теории пограничного слоя и процессы, происходящие при истечении газа из сопел и решеток турбомашин.

Для студентов высших технических учебных заведений, которые обучаются по направлению энергетика.

ББК 253.3 я 73

ISBN

© Бойко А.В., 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие отраслей техники, связанных с энергомашиностроением и теплотехникой, постоянно выдвигает перед инженерами новые задачи, решение которых требует как общетеоретических, общезначимых, так и специальных знаний в области механики жидкости и газа. Следует учитывать при этом, что в последнее десятилетие произошли существенные изменения в системе подготовки технических специалистов, призванных внести весомый вклад в развитие экономики Украины в начале XXI века.

При подготовке специалистов необходимо стремиться к тому, чтобы изучаемые предметы включали как фундаментальные основы, так и разделы, нацеленные на скорейшее освоение студентом выбранной специальности.

В предлагаемом учебнике подбор излагаемого материала осуществлён таким образом, чтобы ориентировать его на студентов, обучающихся в технических университетах по энергомашиностроительным и теплотехническим специальностям.

В учебнике излагаются основы динамики жидкости и газа, основные законы движения жидкости. Отдельные главы посвящены одномерному, а также двух- и трёхмерному движению газа. Рассмотрены особенности течения сжимаемой жидкости, плоское до- и сверхзвуковое течение газа с малыми возмущениями, метод характеристик для двумерного сверхзвукового потока, скачки уплотнения в газовом потоке. Освещены отдельные аспекты теории пограничного слоя.

Предпоследняя глава описывает процессы, происходящие при истечении газа из суживающихся сопел, отверстий и сопел Лаваля, последняя – вопросы течения газа через решётки турбомашин.

В тех частях учебника, в которых излагаются базовые концепции, упор сделан на понимание физики явлений, без чего невозможно глубокое усвоение материала.

Изложение материала осуществляется таким образом, чтобы показать применение общих законов к решению конкретных технических проблем.

Особое внимание обращено на возможность самостоятельной работы студентов в процессе обучения. Все главы снабжены вопросами для самопроверки и задачами. Задачи подобраны так, чтобы помочь изучающему курс глубже понять излагаемый теоретический материал и научиться общие положения теории применять для решения тех проблем, с которыми приходится сталкиваться специалисту при проектировании.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам, в частности, д.т.н. проф. Г.Н. Любчику за ценные замечания при рецензировании книги, а также коллективу кафедры турбиностроения НТУ «ХПИ».

Автор будет признателен читателям за все критические замечания, способствующие улучшению содержания и изложения материала, которые будут учтены при подготовке к изданию учебника на базе данного учебного пособия.

Основные условные обозначения

a – скорость звука, $м/с$;	T – термодинамическая температура
A – площадь, $м^2$;	потока, K ;
F – сила, H ;	α – угол Маха;
g – ускорение свободного падения, $м/с^2$;	Γ – циркуляция скорости, $м^2/с$;
m – масса, $кг$;	k – отношение удельных теплоемкостей;
ρ – массовая плотность, $кг/м^3$;	c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, $Дж/(кг \cdot K)$;
v – удельный объём, $м^3/кг$;	c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, $Дж/(кг \cdot K)$;
V – скорость, $м/с$;	λ – приведенная скорость (безразмерная);
u, v, w – компонент скорости в x, y и z направлении, $м/с$;	μ – коэффициент вязкости, $Па \cdot с, бар \cdot с$;
x, y, z – декартовы координаты;	ν – кинематический коэффициент вязкости, $м^2/с$;
t – время, $с$;	σ – напряжение, $Па, бар$;
l – длина, $мм, м$;	ϕ – потенциал скорости, $м^2/с$;
M – число Маха;	ψ – функция тока, $м^2/с$;
\mathcal{V} – объём, $м^3$;	ω – угловая скорость (вихрь скорости), $рад/с$;
p – давление, $Па, бар$;	τ – касательное напряжения, $Па, бар$;
q – газодинамическая функция расхода;	$z = x + iy$ – комплексная координата.
δ – толщина пограничного слоя;	
$\Delta\theta, \Delta\Theta$ – угол отклонения течения, <i>радиан, градус</i> ;	
R – газовая постоянная, $Дж/(кг \cdot K)$;	
i – удельная энтальпия, $Дж/кг$;	
s – удельная энтропия потока, $Дж/(кг \cdot K)$;	

ВВЕДЕНИЕ

Аэрогидромеханикой называется наука о законах движения и равновесия жидкостей и газов и о силовом взаимодействии жидкой и газообразной среды с движущимся в ней телом или с ограничивающей её поверхностью.

Включает разделы:

Гидродинамика (“hidros” – вода) занимается движением несжимаемых сплошных сред.

Аэродинамика излагает законы силового взаимодействия газообразной (в частности воздушной) среды с движущимся в ней телом.

Газовая динамика занимается изучением движения газа с большой скоростью, когда в значительной мере проявляется свойство сжимаемости.

Магнитная гидродинамика рассматривает взаимодействие ионизированного движущегося газа не только с твердыми телами, но и с электрическими и магнитными полями.

До конца XIX века эта наука в основном базировалась на гидравлике, корабельной науке, занимающейся главным образом *сопротивлением* среды. Круг вопросов, которыми интересовалась практика, был тогда сравнительно узок.

Мощный толчок развития аэрогидромеханики был дан в начале XX столетия с возникновением новой отрасли техники – авиации, которая выдвинула перед наукой ряд новых проблем и по-иному поставила многие прежние. Одной из новых проблем, выдвинутых авиацией перед аэрогидромеханикой, была *проблема подъемной силы*.

Итальянский художник и ученый Леонардо да Винчи предполагал (его заметки по этому вопросу относятся приблизительно к

1505 г.), что причиной силы, поддерживающей птицу в воздухе, являются быстрые удары её крыльев, под действием которых воздух под крыльями уплотняется. Однако, как теперь установлено, сжимаемость воздуха, в которой Леонардо да Винчи видел причину подъемной силы, на самом деле может заметно влиять на силы, возникающие при движении в воздухе, лишь при больших скоростях полёта, порядка скорости распространения звука.

Долгое время в науке господствовала другая теория, основанная на представлениях Ньютона (1642-1727), о том, что воздух состоит из отдельных, не связанных между собой частиц, которые, двигаясь в потоке, набегающем на препятствие, ударяются о его переднюю сторону и отдают препятствию свое количество движения (рис. 1).

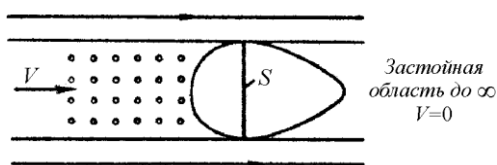


Рис. 1 – Схема обтекания препятствия по ударной теории Ньютона

Справедливым в этой теории, с современной точки зрения, является то, что сила лобового сопротивления

$$F = c \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S$$

Однако численная величина лобового сопротивления получается по этой теории неправильной, так как не учитывается влияние формы тела на его лобовое сопротивление. В то же время при движении в сильно разреженном газе или при движении с очень большой скоростью (значительно большей скорости звука) ударная теория сопротивления среды справедлива.

Академик Российской Академии наук Леонард Эйлер (1707-1783) предложил рассматривать жидкость и газ как непрерывную, легко деформируемую материю. Струйки, подходя к препятствию, не ударяются в него (как дискретные частицы по ударной теории), а отклоняются от препятствия у его передней стороны, плавно со

всех сторон его обходят (обтекают) и смыкаются на задней стороне (рис. 2).

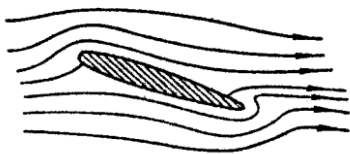


Рис. 2 – Схема обтекания препятствия по теории непрерывной среды Эйлера

Эта точка зрения ближе к действительной (при не очень больших скоростях полёта), нежели ударная теория, но так как в жидкости во времена Эйлера не учитывали сил трения, то гипотеза о непрерывной среде приводила к парадоксальному результату об отсутствии сил сопротивления.

Г. Гельмгольц (Германия) и Кирхгоф в 1868 и 1869 гг. объединили две противоположные точки зрения Эйлера и Ньютона.

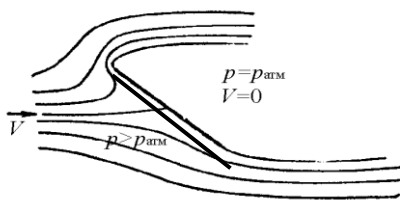


Рис. 3 – Схема обтекания пластинки по струйной теории Гельмгольца-Кирхгофа

Однако, являясь шагом вперед в определении сопротивления неудобнообтекаемых тел, она оказалась малоприменимой для удобнообтекаемых тел (то есть тел малого сопротивления), имеющих основное значение для авиационной техники. Давление на зад-

ней стороне поверхности удобнообтекаемого тела не равно атмосферному давлению, как это было бы в случае образования застойной зоны за телом. Опыты показывают, что в действительности это давление может быть значительно меньше атмосферного. Подъемная сила крыла является не только результатом повышения давления на передней стороне поверхности, но также результатом понижения давления на задней стороне. Поэтому *струйная теория* даёт величины подъёмной силы, значительно уменьшенные против действительных, не говоря уже о том, что для удобнообтекаемых тел

вся картина явления получается по струйной теории совершенно не соответствующей действительности.

Решение проблемы подъёмной силы было впервые дано Н.Е. Жуковским (1847-1921), чем и было положено начало современной аэродинамике. Он выдвинул свою знаменитую теорему, являющуюся и до настоящего времени основой теории крыла:

подъёмная сила, приходящаяся на единицу длины размаха крыла, равна произведению плотности среды на скорость набегающего потока и на величину, характеризующую циркуляционный поток, называемую циркуляцией скорости.

Таким образом, Жуковский Н.Е. впервые построил теорию подъёмной силы на учёте действительных причин, которые эту силу определяют.

Ученик Н.Е. Жуковского С.А. Чаплыгин (1869-1942) дал теорию движения газа с большими скоростями и является поэтому основоположником современной газовой динамики. Им также созданы (1913 г.) основы теории крыла конечного размаха.

Современная аэродинамика так ставит вопрос: *задача только тогда считается решённой, когда скорости, действующие силы и другие характеристики движения определены в каждой точке и для каждого момента времени.*

ГЛАВА 1

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗА

1.1 Определение жидкости. Концепция непрерывности

Жидкость – это вещество, которое деформируется непрерывно под действием тангенциальных (касательных) сил.

Когда тангенциальные силы приложены к твердому телу, они вызывают конечную деформацию, которая не изменяется до тех пор, пока не меняется сила. В жидкости мы имеем относительное движение между слоями жидкости всё время, пока действует тангенциальная сила. Мы говорим, что “жидкость не может противостоять касательным напряжениям.”

Вывод, следующий из определения жидкости: если нет относительного движения в жидкости, то есть если частицы жидкости не деформируются, тогда не могут быть касательные напряжения, действующие на эти частицы.

Можно во многих аэродинамических исследованиях отказаться от действительного молекулярного строения материи и предположить, что жидкость или газ заполняют пространство сплошь без образования каких бы то ни было пустот. В этом заключается гипотеза о *непрерывности* или *сплошности жидкой среды*, которая впервые была введена в науку Даламбером в 1744 г. и затем Эйлером в 1753 г., в противоположность представлению Ньютона о том, что жидкость состоит из отдельных частиц. Гипотеза непрерывности жидкой среды сразу же упрощает исследование; она позволяет рассматривать все *механические характеристики жидкой среды*, каковыми являются *скорость, плотность, давление и т.д.* как *функции координат точки и времени*, причем в большинстве случаев эти функции предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

1.2 Свойства сплошности

Плотность в точке. Рассмотрим массу жидкости δm в объеме $\delta \mathcal{V}$, окружающую точку P в непрерывной жидкости (рис. 1.1а).

$\frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}}$ — средняя массовая плотность жидкости в объеме $\delta \mathcal{V}$.

Предположим, что δV достаточно большой объём. Нанесём отношение $\frac{\delta m}{\delta V}$ в функции δV (рис. 1.1*b*). Сначала средняя плотность стремится приблизиться к асимптоте, по мере того, как заключённая в объёме δV жидкость становится все более и более однородной. Однако, когда δV становится настолько малым, что содержит относительно небольшое количество молекул, средняя плотность будет неустойчивой во времени, зависящей от попадания в объём δV или ухода из него молекул при их хаотическом движении. В этом случае невозможно говорить об определённой величине для $\frac{\delta m}{\delta V}$. Мы можем представить наименьший объём $\delta V'$, который обладает свойством сплошности, и определить *плотность в точке* как

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}. \quad (1.1)$$

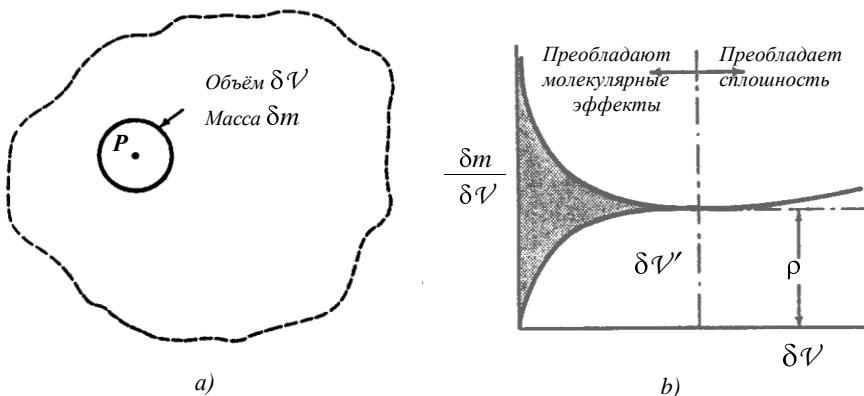


Рис. 1.1 – Определение плотности в точке

Это определение освещает идею сплошности и показывает действительную природу свойства сплошности “в точке”, как фиктивную, но весьма полезную и широко используемую концепцию.

Скорость жидкости в точке. Скорость жидкости в точке не связана с мгновенной скоростью молекулы возле этой точки.

Мы рассмотрим движение центра тяжести объема $\delta V'$ мгновенно окружающего эту точку и определим *скорость жидкости в точке P* как мгновенную скорость этого центра тяжести. Так скорость жидкости в точке есть мгновенная скорость центра тяжести частицы жидкости, который в этот момент проходит через точку. Под *частицей жидкости* мы подразумеваем здесь маленькую массу зафиксированной жидкости по размерам сравнимой с $\delta V'$.

Плотность – скалярная величина, скорость жидкости в точке – вектор. После введения системы координат возможно разложение вектора скорости в три скалярные компоненты.

Линия тока. В любое время каждая точка сплошной жидкости имеет соответствующий вектор скорости жидкости. Кривая, которая везде касательная к векторам скорости, известна как *мгновенная линия тока потока*. Семейство линий тока наиболее часто используется для графического представления потока. В нестационарном потоке линии тока изменяются от мгновения к мгновению. Для стационарного потока, однако, линии тока являются постоянными во времени и представляют также траектории жидких частиц.

Трубка тока. Рассмотрим элементарную площадь dA нормальную к вектору скорости в некоторой точке.

Линии тока, проходящие через границу (периферию) dA образуют поверхность, которая называется *трубкой тока*. Так как здесь мы не имеем нормальных составляющих скоростей к линиям тока, то стенки трубки тока непроницаемы для потока.

Напряжения в точке. Рассмотрим плоскость, проходящую в данном направлении через точку P непрерывной среды и выделим площадь δA вокруг точки P в этой плоскости (рис. 1.2а).

Мы знаем из эксперимента, что части жидкости, разделённые этой поверхностью имеют силовое воздействие друг на друга, и, согласно третьему закону Ньютона, жидкость на одной стороне оказывает равное, но противоположное воздействие на жидкость с другой стороны. Такие силы называются *поверхностными силами*.

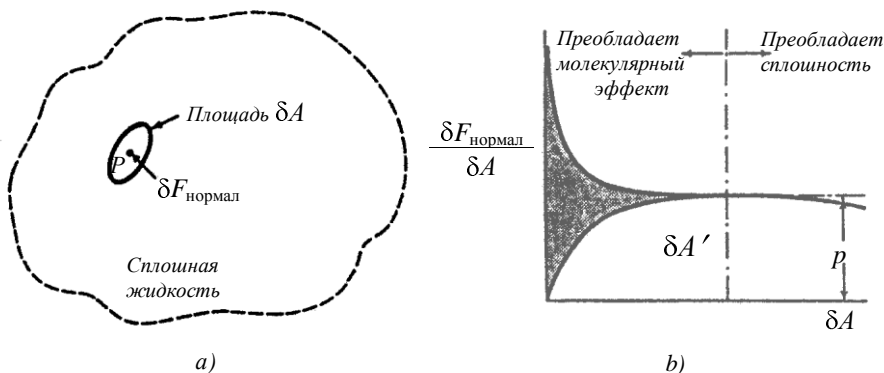


Рис. 1.2- Определение нормального напряжения в точке

Нормальные напряжения. Поверхностная сила, действующая на площадь δA может быть представлена в виде нормальной компоненты к δA и компоненты, лежащей в плоскости δA . Рассматривая нормальную составляющую силы (иллюстрирует наше рассмотрение рис. 1.2b), мы определим *давление жидкости* в точке P в данном направлении как предел нормальной составляющей силы на единицу площади:

$$p \equiv \lim_{\delta A \rightarrow \delta A'} \frac{\delta F_{\text{нормал}}}{\delta A}. \quad (1.2)$$

Касательные напряжения. Аналогично, *касательные напряжения* τ определены в виде предела тангенциальной составляющей силы, действующей на δA на единице площади

$$\tau \equiv \lim_{\delta A \rightarrow \delta A'} \frac{\delta F_{\text{танг}}}{\delta A}. \quad (1.3)$$

И давление, и касательные напряжения являются конечно векторами.

Гидростатическое давление. Теперь возникает вопрос, зависит ли давление в точке P (или нормальные напряжения) от ориентации плоскости δA . Для ответа на этот вопрос рассмотрим невязкую жидкость, то есть жидкость в которой отсутствуют касательные напряжения даже при наличии относительного сдвига (движения) слоёв жидкости.

Для упрощения рассмотрим двумерную задачу и исследуем динамику бесконечно малой треугольной в основании частицы жидкости единичной глубины, окружающей точку P (рис. 1.3).

Ввиду отсутствия касательных напряжения на три поверхности действуют только нормальные напряжения, то есть давления.

На рис. 1.3 показана схема действия сил на выделенный объём жидкости.

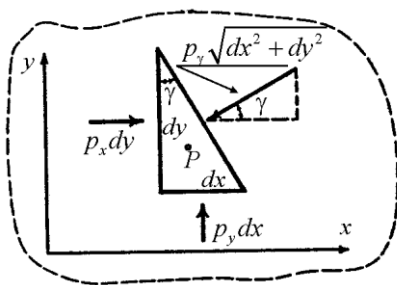


Рис. 1.3 – Силы нормального напряжения в точке

p_x – давление в точке P в x -направлении;

p_y – давление в точке P в y -направлении;

p_γ – давление в точке P в γ -направлении.

Положим g_x и g_y – составляющие объёмной силы (то есть силы тяжести), действующей в жидкости на единицу массы. Теперь мы можем записать второй закон Ньютона в x -направлении следующим образом:

$$\sum F_x = m \cdot a_x$$

$$p_x dy - p_y \sqrt{dx^2 + dy^2} \cos \gamma + g_x \cdot \rho \frac{dx dy}{2} = \rho \frac{dx dy}{2} a_x,$$

здесь a_x – ускорение в x -направлении.

Заметим, что

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} \cos \gamma = dy,$$

затем произведением $dx dy$ пренебрегаем, как величиной второго порядка малости по сравнению с dy .

В результате получаем $p_x = p_y$.

Сделав аналогичные преобразования второго закона Ньютона в y -направлении, получаем $p_y = p_\gamma$.

Окончательно имеем

$$p_x = p_y = p_\gamma$$

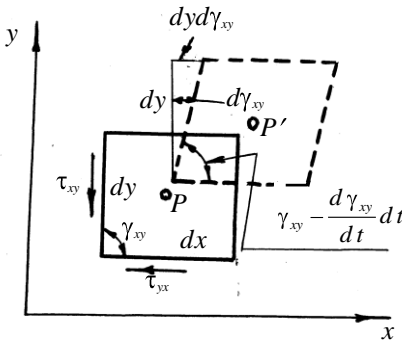
и так как γ -направление было избрано произвольным, то мы приходим к заключению, что *в невязкой жидкости, движущейся или находящейся в состоянии покоя, давление жидкости в точке является одинаковым во всех направлениях.*

Для вязкой жидкости в покое мы приходим к аналогичному выводу, т.к. в этом случае тоже отсутствуют касательные напряжения, ввиду отсутствия относительного движения слоёв жидкости.

Составляющие напряжений в вязкой жидкости. В общем случае для вязкой движущейся жидкости мы имеем касательные напряжения. В этом случае p_x , p_y и p_γ являются различными. В этом случае правильнее говорить о шести составляющих напряжений в точке вместо давления в точке. Однако мы зачастую говорим давление в точке вязкой жидкости, утверждая тем самым тот факт, что в таком случае (особенно, если число Рейнольдса намного превосходит единицу, во много раз больше единицы) касательные напряжения являются малыми по сравнению с нормаль-

ными напряжениями и изменение нормальных напряжений с ориентацией являются пренебрежимо малыми.

Коэффициент вязкости. Во всех реальных жидкостях экспериментаторы обнаруживали, что деформации сдвига всегда сопровождались касательными напряжениями; касательные напряжения пропорциональны скорости деформаций сдвига.



Составляя уравнения моментов относительно точки P (рис. 1.4) имеем

$$\tau_{xy} dy \frac{dx}{2} = \tau_{yx} dx \frac{dy}{2}.$$

Откуда имеем

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Рис. 1.4 – Деформация движущейся частицы жидкости при смещении одной грани

За время dt точка P переместилась в P' . Угол γ_{xy} изменился на величину $d\gamma_{xy}$. Согласно гипотезы Ньютона касательные напряжения пропорциональны скорости относительного сдвига слоев жидкости, то есть

$$\tau_{xy} \sim \frac{dV}{dy} = \frac{dy d\gamma_{xy}}{dt} \cdot \frac{1}{dy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt}; \quad \tau_{xy} \sim \frac{d\gamma_{xy}}{dt}.$$

Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом вязкости* и обозначается μ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \frac{d\gamma_{xy}}{dt}. \quad (1.4)$$

При одновременном смещении граней (рис. 1.5) имеем:

$$AA' = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt; \quad \angle AOA' = \frac{\partial v}{\partial x} dt; \quad \angle BOB' = \frac{\partial u}{\partial y} dt.$$

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} dt = \frac{\partial u}{\partial y} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dt; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

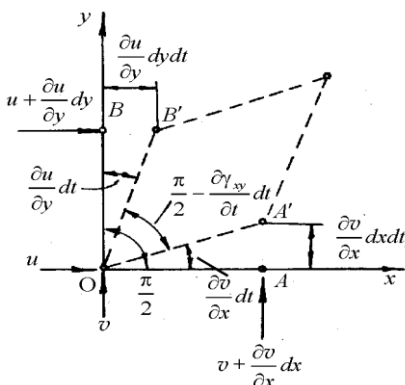


Рис. 1.5 – Схема относительной деформации частицы жидкости

С учетом (1.4) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}; \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy}; \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Идеальная жидкость. Определяется как жидкость, имеющая коэффициент вязкости равный нулю, что физически означает отсутствие касательных напряжений, несмотря на наличие относительных деформаций сдвига.

Невязкие жидкости отличаются от вязких в одном очень важном качестве. Все реальные, следовательно вязкие жидкости, прилипают к границам твердого тела, с которыми они соприкасаются; это значит, что на границах твердого тела жидкость имеет одинаковую скорость с твердыми границами. Идеальная жидкость, однако, скользит по твердым границам совершенно свободно.

Пограничный слой. Так как многие реальные жидкости имеют небольшую вязкость, но тем не менее прилипают к твердым границам, введено понятие пограничного слоя. Согласно этой концепции силами вязкости в жидкости можно пренебрегать по сравнению с инерционными силами на некотором расстоянии от границы. В пограничном слое возле твердой границы, однако, касательные напряжения не равны нулю.

тельные силы имеют достаточно большие значения ввиду больших деформаций сдвига, вызванных увеличением скорости жидкости на довольно небольшом участке от состояния покоя на границах твердого тела. Такое разделение потока на две части существенно упрощает задачи, позволяет аналитически их описать.

Математическое описание сплошности. Имеется две возможные точки зрения при описании движения жидкостей. Первая – метод Лагранжа, который используется для описания динамики отдельных частиц. С помощью этого метода описывается история отдельных частиц жидкости: в каждый момент времени местоположение, плотность, скорость и т.д. определяются для выбранной частицы жидкости.

Метод Эйлера – концентрирует внимание на точке пространства и определяет в каждый момент времени плотность, давление, скорость и т.д. жидкой частицы, которая находится в этой точке в данный момент времени.

Для большинства задач Эйлеровское описание движения жидкости более удобно и мы будем в основном использовать этот метод.

Рассматривая плотность как типичное свойство сплошности, мы говорим в методе Эйлера, что плотность есть функция координат и времени. В прямоугольной системе координат математически это можно записать

$$\rho = \rho(x, y, z, t) . \quad (1.6)$$

Для произвольных приращений x , y , z и t , соответствующее приращение ρ может быть записано в зависимости от частных производных

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt . \quad (1.7)$$

Уравнениями подобными (1.6) и (1.7) можно записать все свойства сплошности, определённые ранее.

Установившийся поток. Этот случай часто встречается в практике. Под ним мы будем понимать такой поток, в котором в каждой точке пространства нет изменений характеристик потока по времени. Беря для иллюстрации плотность, мы можем записать для установившегося потока

$$\rho = \rho(x, y, z); \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

1.3 Системы и контрольные объёмы.

Система – иногда ее называют *свободное тело* или *изолированное тело*, определяется как произвольное количество материи с одинаковыми свойствами. Всё, находящееся вне системы, называется *окружающей средой*. *Граница системы* – мысленная поверхность, отделяющая систему от окружающей среды. При решении задач исследователь, вводя понятие системы, изучает взаимодействие между системой и окружающей средой.

Так для иллюстрации рассмотрим второй закон Ньютона $F = ma$. Здесь F – результирующий вектор силы, с которой окружающая среда действует на систему; m – масса системы; a – вектор ускорения, которое испытывает центр массы системы.

Но иногда понятие системы не очень удобное, особенно когда мы имеем дело с жидкостью, где иногда бывает трудно определить границы жидкости системы в любом отрезке времени. Это особенно относится к течению в турбомашинах, где сложные процессы имеют место и где различные частицы жидкости, проходя турбину, испытывают различное воздействие.

Контрольный объём. Беря всё вышесказанное во внимание, мы определяем контрольный объём как произвольный объём, *зафиксированный в пространстве* и через который протекает жидкость. Жидкость, занимающая контрольный объём, меняется с каждым мгновением времени. Поверхность, которая ограничивает контрольный объём, называется *контрольной поверхностью*. Она всегда замкнутая.

1.4 Скалярные, векторные и тензорные поля в гидрогазодинамике.

Скалярным называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства одним числом. Такое поле описывается одной функцией, зависящей от трёх координат. Скалярным будет, например, поле плотности или температуры.

Основное свойство скалярной функции $a(x, y, z)$ состоит в том, что её численное значение не изменяется при преобразовании координат.

Векторным называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства величиной и направлением. Вектор \vec{a} (в пространстве трёх измерений) может быть задан тремя компонентами: $a_1(x, y, z)$, $a_2(x, y, z)$, $a_3(x, y, z)$, то есть тремя функциями от трёх переменных.

Это можно записать также в виде таблицы из трёх величин

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Вектор подчиняется определённому закону преобразования его компонент и отличается от скалярной величины, численное значение

ние которой, как указывалось выше, не меняется при преобразовании координат. Очевидно, что сам вектор не меняется в новых координатах, а меняется только его компоненты.

Помимо скалярных и векторных полей в механике сплошной среды рассматриваются ещё *тензорные* поля. В принятой записи (рис. 1.6) каждое из напряжений σ_{ij} имеет два индекса. первый индекс означает ориентацию площадки, на которую действует напряжение второй – ось

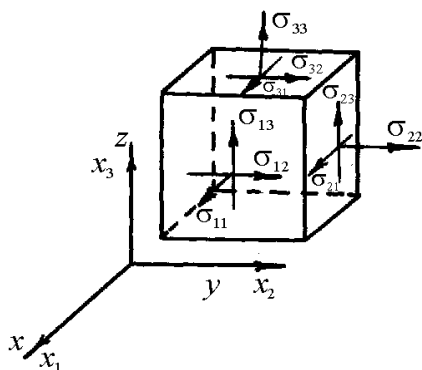


Рис. 1.6

проектирования. Например, σ_{21} – напряжение, которое действует на площадку, перпендикулярную оси x_2 и параллельно оси x_1 .

Компоненты напряжений можно записать в виде таблицы (матрицы тензора напряжений)

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{ij}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3; \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix} \quad (1.9)$$

Здесь первый номер – номер строки, второй – номер столбца. Нормальные напряжения имеют два одинаковых индекса (диагональ матрицы), касательные – имеют разные индексы.

(1.9) – *тензор второго ранга* (по числу индексов у компонент);

вектор (1.8) – *тензор первого ранга*;

скаляр $a(x, y, z)$ – *тензор нулевого ранга*.

То есть тензор – более общее понятие, чем вектор или скаляр.

При принятых нами ранее обозначениях

$$\Pi = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Перед давлением p ставится знак минус, так как давление обычно сжимает жидкость, то есть действует против положительного направления нормали к площадке.

Давление в точке определим как среднее арифметическое, взятое с отрицательным знаком, из нормальных напряжений на три взаимно-перпендикулярные площадки, проведенные через эту точку:

$$p = -\frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.11)$$

Используя формулы векторного анализа (см. приложение), мы можем записать уравнение (1.7) для плотности в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \rho. \quad (1.12)$$

1.5 Связь между элементами напряжений и соответствующими скоростями деформаций

Впишем в квадрат, вычерченный жирными линиями (рис. 1.7), другой – вычерчен тонкими линиями.

Когда первый (большой) квадрат деформируется указанным образом (жирный пунктир), второй переходит в прямоугольник. Так как силы, приложенные к прямоугольному треугольнику, отделяемому от большого квадрата диагональю, должны находиться в равновесии, то по диагоналям должны действовать сжимающие или

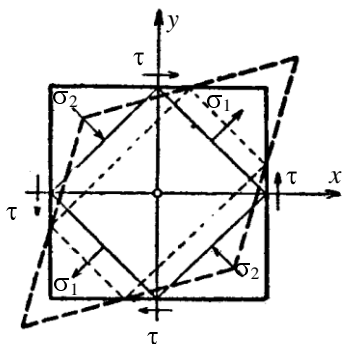


Рис. 1.7

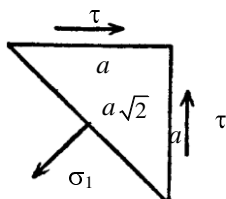


Рис. 1.8 – Равновесие напряжений сдвига и нормального напряжения

растягивающие силы.

Из рис. 1.8 получаем:

$$2a\tau \cdot \sin 45^\circ - a\sqrt{2}\sigma_1 = 0.$$

Отсюда $\sigma_1 = \tau$.

Аналогичным образом из равновесия прямоугольного треугольника, отделяемого от большого квадрата другой диагональю, получаем, что

$\sigma_2 = -\tau$ (так как сжатие).

Вычитая σ_2 из σ_1 находим:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau.$$

Определим теперь насколько диагональ квадрата (укорачивается) удлиняется, когда последний деформируется так, как показано на рис. 1.9.

$$BB' = EM' = AB \cdot \frac{d\gamma}{2}, \quad MM' = \frac{EM'}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\gamma}{2}.$$

С другой стороны

$$AM = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

Удлинение ϵ_1 диагонали AC равно:

$$\epsilon_1 = \frac{CC'}{AC} = \frac{MM'}{AM} = \frac{d\gamma}{2}.$$

Аналогичным образом для второй диагонали BD :

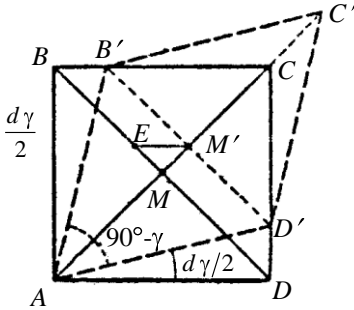


Рис. 1.9 – Изменение длины диагоналей квадрата при бесконечно малой деформации под действием напряжений сдвига

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\gamma}{2}.$$

Вычитая ε_2 из ε_1 , имеем:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = d\gamma.$$

Если теперь квадрат, изображённый на рис. 1.9, отнести к системе координат, повернутой относительно сторон квадрата на 45° , то будем иметь:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{xy} = 2\mu \frac{d\gamma}{dt} = 2\mu \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{dt} \right).$$

В этой системе координат

$$\frac{\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon_y}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_x - \sigma_z &= 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \text{аналогично} \quad (1.13)$$

Прибавляя к первому из уравнений (1.13) тождество $\sigma_x - \sigma_x = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ и складывая затем оба уравнения, получаем, принимая во внимание равенство (1.11):

$$3\sigma_x + 3p = 2\mu \left[3 \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right],$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (1.14)$$

Аналогично получаем

Или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{xx}, \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{yy}, \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) = -p + \tau_{zz}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.15)$$

Здесь через τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , обозначены составляющие *нормальных напряжений, зависящих от вязкости*.

Разложение поверхностной результирующей силы на элементы тензора напряжений

Разложим векторы $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ на прямоугольные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_x &= \vec{i} \sigma_x + \vec{j} \tau_{xy} + \vec{k} \tau_{xz}, \\ \vec{p}_y &= \vec{i} \tau_{yx} + \vec{j} \sigma_y + \vec{k} \tau_{yz}, \\ \vec{p}_z &= \vec{i} \tau_{zx} + \vec{j} \tau_{zy} + \vec{k} \sigma_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

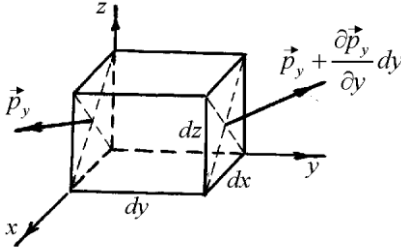


Рис. 1.10 – Силы, приложенные к граням $dx dz$ элемента объёма ($dx dy dz$) вязкой жидкости

Результирующая сила, действующая на поверхность бесконечно малого элемента жидкости (рис. 1.10), объём которого равен $d\mathcal{V} = dx dy dz$, складывается из трёх векторов:

$$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz, \quad \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dy dz dx, \quad \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz dx dy.$$

и будет равна

$$\vec{R} = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) d\mathcal{V}. \quad (1.17)$$

Таким образом, с учетом (1.16), (1.15) и (1.5) для R_x можно написать:

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[-p + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

При $\mu = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta u, \\ R_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta v, \\ R_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{V} + \mu \Delta w \end{aligned} \right\} . \quad (1.18)$$

Выше полученные компоненты с учётом (1.16) получаем из (1.17):

$$\begin{aligned}\vec{R} = & \vec{i} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \dots \text{компонент в направлении } x, \\ & + \vec{j} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \dots \text{компонент в направлении } y, \\ & + \vec{k} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \quad \text{компонент в направлении } z.\end{aligned}$$

В векторной форме (1.18) при $\mu = \text{const}$ полная поверхностная сила, отнесённая к единице объёма может быть представлена в форме:

$$\vec{R} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{3} \mu \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}, \quad (1.19)$$

или

$$\vec{R} = -\text{grad } p + \frac{1}{3} \mu \text{grad div } \vec{V} + \mu \Delta \vec{V}. \quad (1.20)$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение жидкости. В чём состоит концепция непрерывности?
2. Дайте определение системы, контрольного объёма и контрольной поверхности.
3. Поля каких физических величин описывают скаляры, векторы и тензоры?
4. Что такое коэффициент вязкости?
5. Какая существует связь между элементами напряжений и соответствующими скоростями деформаций?
6. Получите уравнение для полной поверхностной силы, отнесённой к единице объёма.

ГЛАВА 2.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Весь анализ, касающийся движения сжимаемой жидкости, основывается прямо или косвенно на четырёх основных физических законах, описывающих это движение. Этими законами являются:

- (i) закон сохранения массы;
- (ii) второй закон движения Ньютона;
- (iii) первый закон термодинамики;
- (iiii) второй закон термодинамики.

В дополнение к этим основным принципам обычно используют вспомогательные соотношения. Примером этому могут быть уравнения состояния идеального газа, закон пропорциональности между касательными напряжениями и скоростью деформации сдвига, уравнение теплообмена и т.д.

2.1 Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности движения.

Выделим в движущейся жидкости систему объёмом \mathcal{V} , состоящую во всё время движения из одних и тех же частиц жидкости. *Масса m этого объёма во всё время движения остаётся постоянной*, что математически описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Определяя массу m этого объёма как $m = \rho_{cp} \mathcal{V}$, можно записать

$$\frac{d(\rho_{cp} \mathcal{V})}{dt} = 0.$$

Так как переменными здесь являются и плотность жидкости и величина выделенного объёма, то

$$\mathcal{V} \frac{d\rho_{cp}}{dt} + \rho_{cp} \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0.$$

Деля почленно на массу объёма, то есть на $\rho_{cp} \mathcal{V}$, получаем

$$\frac{1}{\rho_{cp}} \cdot \frac{d\rho_{cp}}{dt} + \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0$$

$d\mathcal{V}$ – изменение первоначально выделенного объёма \mathcal{V} и является, следовательно, величиной объёмной деформации;

$\frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}}$ – относительная объёмная деформация, отнесённая к единице объёма;

$\frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt}$ – скорость относительной объёмной деформации.

Аналогично можем записать

$\frac{1}{\rho_{cp}} \cdot \frac{d\rho_{cp}}{dt}$ – скорость относительного изменения средней плотности.

Последнее уравнение содержит не вполне определённую величину ρ_{cp} , зависящую от произвольно выбранного объёма \mathcal{V} . Чтобы избежать этой неопределённости, будем уменьшать объём \mathcal{V} , стягивая его к некоторой внутренней точке P . При этом получаем:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \delta\mathcal{V}'} \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0.$$

Распространим условие сплошности и на объём $\delta\mathcal{V}'$. Тогда, уменьшая \mathcal{V} до нуля, в пределе при $\mathcal{V} \rightarrow 0$ получаем:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{V}} \cdot \frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0. \quad (2.1)$$

Это уравнение неразрывности движения, в котором ρ – плотность в той точке, к которой стягивается объём \mathcal{V} , а второе слагаемое является скоростью относительной объемной деформации в той же точке.

В частном случае, когда жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), уравнение неразрывности движения принимает вид

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 0.$$

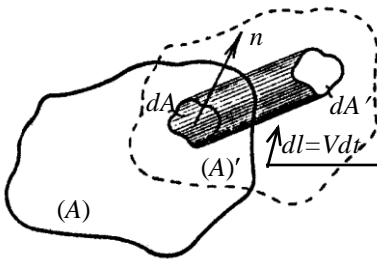


Рис. 2.1 – Перемещение выделенного объёма в пространстве и его изменение за время dt

Закон сохранения массы принимает в этом случае форму закона сохранения объёма ($\mathcal{V} = \text{const}$).

Скорость относительной объемной деформации непосредственно связана со скоростями движения частиц на поверхности выделенного объёма.

Изменение $d\mathcal{V}$ выделенного объёма можно рассматривать как результат перемещения частиц, которые находились в начале промежутка времени dt на поверхности A . За время dt площадка dA переместилась в положение dA' (рис. 2.1), при этом объём изменился на величину

$$dA \cdot dl_n = dA \cdot V_n \cdot dt = V_n \cdot dt \cdot dA.$$

Общее приращение выделенного объёма

$$d\mathcal{V} = \iint_{(A)} V_n \cdot dt \cdot dA.$$

Вынося dt за знак интеграла, так как оно одинаково для всех цилиндров, получим скорость объемной деформации в виде

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \iint_{(A)} V_n \cdot dA. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) имеет ещё иной физический смысл. Представим, что A – неподвижная замкнутая поверхность, через которую протекает жидкость. Тогда интеграл (2.2) представляет собой *объёмный расход жидкости* сквозь всю поверхность A .

Подставляя в уравнение (2.1) полученное выражение (2.2), мы будем иметь

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\iint_{(A)} V_n \cdot dA}{\mathcal{V}} = 0.$$

Второе слагаемое представляет собой удельный объёмный расход жидкости сквозь поверхность, стягиваемую к точке; оно называется дивергенцией вектора скорости в данной точке и обозначается

$$\operatorname{div} \vec{V} = \lim_{\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\iint_{(A)} V_n \cdot dA}{\mathcal{V}}.$$

Равенство (2.1) с помощью выведенного здесь обозначения для второго слагаемого может быть записано так

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.3)$$

Или можем записать $\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0.$

Используя (1.12) равенство (2.3) запишется

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Вспоминая формулы векторного анализа, мы можем записать

$$\vec{V} \cdot \text{grad } \rho + \rho \cdot \text{div } \vec{V} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \text{div}(\rho \vec{V}).$$

Тогда уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (2.4)$$

В декартовой прямоугольной системе координат уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (2.5)$$

В случае стационарного поля плотности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0.$$

В частном случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности переходит в уравнение несжимаемости

$$\text{div } \vec{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение расхода для трубки тока. Выделим в трубке тока контрольный объём, через который течёт жидкость. Контрольный объём остаётся зафиксированным в пространстве, но система движется в направлении линий тока. Два положения системы показаны на рис. 2.2 пунктирными линиями. Для удобства мы рассмотрим три области пространства, обозначенные I, II и III на рис. 2.2.

В момент времени t система занимает пространства I и III, а момент времени $t+dt$ пространства I и II. Так как масса системы не меняется, мы можем записать

$$m_{II} + m_{III} = m_{II+dt} + m_{III+dt},$$

где m_{It} — масса жидкости в объёме I в момент времени t и т.д.

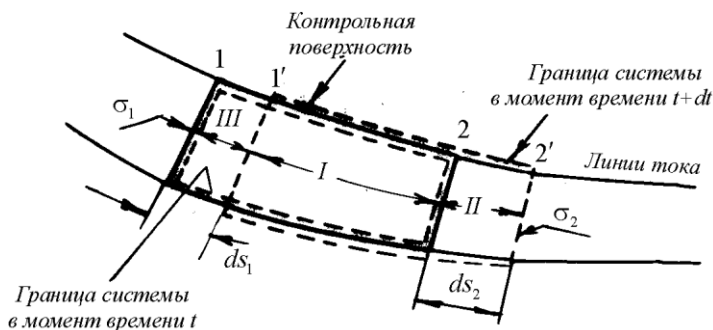


Рис. 2.2 – Одномерное течение

Простые преобразования дают

$$\frac{m_{It+dt} - m_{It}}{dt} = \frac{m_{III}t}{dt} - \frac{m_{III}t+dt}{dt}.$$

Слагаемое слева представляет собой скорость изменения массы в пространстве I во времени. Так как $dt \rightarrow 0$, то пространство I совпадает с контрольным объёмом, поэтому в пределе

$$\frac{m_{It+dt} - m_{It}}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(m_{к.об.}),$$

где $m_{к.об.}$ — мгновенная масса в контрольном объёме.

Обозначим: σ_1 — поперечное сечение трубки тока в сечении 1;

V_1 — скорость сечения 1;

ρ_1 — плотность в пространстве III;

σ_2 — поперечное сечение трубки тока в сечении 2;

V_2 — скорость сечения 2;

ρ_2 — плотность в пространстве II.

Тогда запишем:

$$\frac{m_{III}}{dt} = \rho_1 \sigma_1 \frac{dS_1}{dt} = \rho_1 \sigma_1 V_1 = \int \rho V_n dA_{ex},$$

$$\frac{m_{III+dt}}{dt} = \rho_2 \sigma_2 \frac{dS_2}{dt} = \rho_2 \sigma_2 V_2 = \int \rho V_n dA_{blx}.$$

С учётом вышеизложенного закон сохранения массы для трубки тока запишется:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_{к.об.}) = \rho_1 V_1 \sigma_1 - \rho_2 V_2 \sigma_2.$$

Заметим, что в любое мгновение

$$m_{к.об.} = \int_{к.об.} \rho d\mathcal{V},$$

где $d\mathcal{V}$ – элемент контрольного объёма \mathcal{V} ,

ρ – местная плотность этого элемента.

Тогда

$$\frac{\partial m_{к.об.}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{к.об.} \rho d\mathcal{V} = \int_{к.об.} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}.$$

То есть мы можем записать

$$\int_{к.об.} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = \rho_1 V_1 \sigma_1 - \rho_2 V_2 \sigma_2. \quad (2.7)$$

В случае стационарного течения (стационарного поля плотности) жидкость изменяется в контрольном объёме постоянно, но общая масса в контрольном объёме остаётся неизменной. Или математически это означает для каждого элемента контрольного объёма $\partial \rho / \partial t = 0$.

Тогда уравнение расхода для элементарной струйки принимает вид:

$$\rho_1 V_1 \sigma_1 = \rho_2 V_2 \sigma_2 \quad \text{или} \quad \rho V \sigma = const \quad \text{или} \quad d(\rho V \sigma) = 0. \quad (2.8)$$

Обозначим $G \left[\frac{\kappa\mathcal{Z}}{\text{сек}} \right]$ – массовый расход жидкости через трубку

тока, который согласно (2.8) остаётся постоянным для любого сечения трубки тока, то есть

$$\sigma\rho V = G = \text{const}.$$

Вспомним, что удельный объём единицы массы жидкости является величиной, обратной плотности

$$v \equiv \frac{\mathcal{V}}{m} = \frac{1}{\rho},$$

тогда можно записать

$$\frac{\sigma V}{v} = G \left[\frac{\kappa\mathcal{Z}}{\text{сек}} \right].$$

Обозначим σ через F (площадь), скорость V через C , получаем в наиболее часто встречаемом виде в книгах по турбиностроению уравнение расхода

$$Gv = FC$$

Из уравнения расхода (2.8) вытекают интересные следствия относительно формы струйки: свободный конец струйки не может находиться внутри жидкости. В самом деле струйка не может закончиться внутри жидкости сечением конечного размера, так как это противоречило бы предположению о непрерывном распределении скоростей в жидкой среде; она не может также сойти на нет в форме острия, так как в конечной точке острия по уравнению расхода получились бы бесконечно большие плотность или скорость частиц, что физически невозможно. Таким образом, *струйка не может иметь внутри жидкости ни начала, ни конца; она должна, следовательно, иметь начало и конец на свободных границах жидкости или быть замкнутой.*

2.2 Теорема импульсов. Уравнение количества движения.

Второй закон Ньютона – основной принцип динамики. Он лежит в основе теоремы импульсов, которая, как известно из курса общей механики, формулируется следующим образом: *дифференциал количества движения материальной системы равен элементарному импульсу действующих на систему внешних сил.*

$$\sum \vec{F} dt = d \ m \vec{V} \ .$$

На рис. 2.3 показан произвольный контрольный объем совместно с положением системы в момент времени t и $t+dt$; система определена как количество вещества, заполняющее контрольный объем в момент времени t . Для общности здесь также показано проникнутое в контрольный объем препятствие типа стойки, экрана, щита, пламедержателя, направляющего крыла, турбинной лопатки.

Для выбранного контрольного объема та часть препятствия, которая находится в контрольном объеме, является частью системы, чье движение в течении времени dt изучается.

Для системы в x -направлении мы можем записать

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \ m V_x \ ,$$

где слева стоит алгебраическая сумма проекций на ось x сил, действующих на систему в течении интервала времени dt ; справа мы имеем скорость изменения количества движения в направлении оси x всей системы.

Мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ m V_x &= \frac{m V_{x \text{ II}+dt} + m V_{x \text{ III}+dt}}{dt} - \\ &\quad - \frac{m V_{x \text{ II}} + m V_{x \text{ III}}}{dt} . \end{aligned}$$

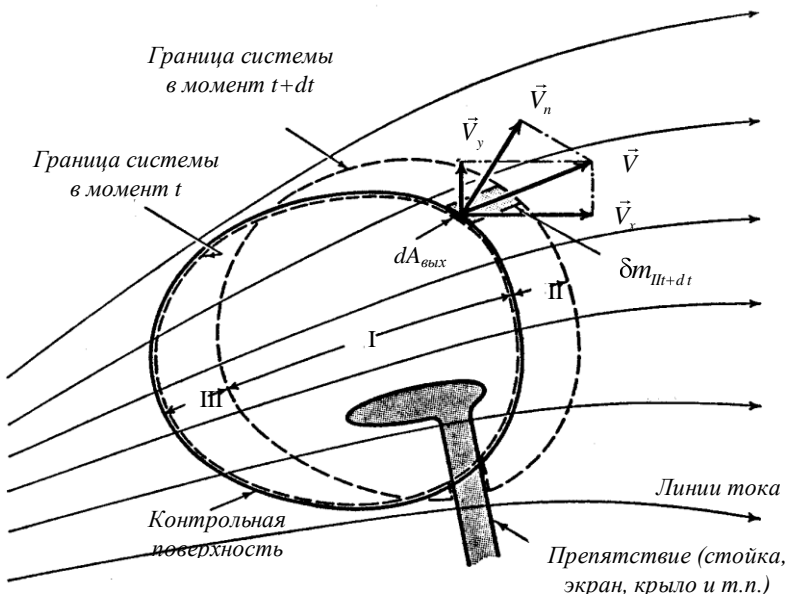


Рис. 2.3. – Течение жидкости через контрольный объём

Слагаемое

$$\frac{mV_{x_{II+dt}} - mV_{x_{II}}}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} mV_{x_{к.об.}}$$

представляет собой изменение во времени количества движения в x -направлении в пространстве I.

В пределе $dt \rightarrow 0$, пространство I совпадает с контрольным объемом. То есть этот член представляет собой изменение во времени проекции количества движения на ось x контрольного объема.

Далее мы можем записать

$$\frac{mV_{x_{II+dt}}}{dt} = \frac{\sum V_x \delta m_{II+dt}}{dt} = \sum V_x \frac{\delta m_{II+dt}}{dt} = \int V_x \cdot \rho V_n \cdot dA_{вых}.$$

Аналогично мы имеем

$$\frac{mV_x}{dt} = \sum V_x \frac{\delta m}{dt} = \int V_x \cdot \rho V_n \cdot dA_{ex}.$$

Теперь мы можем записать

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} mV_x_{\kappa.об.} + \int V_x \cdot V_n \cdot \rho \cdot dA_{вых} - \int V_x \cdot V_n \cdot \rho \cdot dA_{вх}. \quad (2.9)$$

В пределе, когда dt исчезает, $\sum F_x$ становится алгебраической суммой проекций сил на ось x действующих мгновенно на жидкость, находящуюся в контрольном объеме.

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} mV_x_{\kappa.об.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa.об.} V_x \cdot \rho \cdot d\mathcal{V} = \int_{\kappa.об.} \frac{\partial}{\partial t} \rho V_x \cdot d\mathcal{V},$$

где ρ и V_x являются местной плотностью и x -скоростью, соответственно, элемента жидкости объемом $d\mathcal{V}$ в контрольном объеме.

Тогда можем записать

$$\sum F_x = \int_{\kappa.об.} \frac{\partial}{\partial t} \rho V_x \cdot d\mathcal{V} + \int \rho V_n V_x dA_{вых} - \int \rho V_n V_x dA_{вх}. \quad (2.10)$$

Аналогичные выражения мы имеем в y и z направлениях. Используя векторную форму записи, уравнение количества движения для контрольного объема может быть представлено одним уравнением:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa.об.} \rho \vec{V} d\mathcal{V} + \oint_{\kappa.пов.} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \vec{V}. \quad (2.11)$$

В выражение $\sum \vec{F}$ или $\sum F_x$ для x -направления входит алгебраическая сумма всех сил, которые действуют со стороны окружающей среды на вещество, в данный момент времени занимающее контрольный объем (лучше сказать заполняющее контрольный объем). Напомним, что эти силы можно разделить на два класса: (i) объемные силы, (ii) поверхностные силы.

Объемные силы: силы гравитационного ускорения, магнитные или электродинамические силы, инерционные силы, силы Кориолиса.

Поверхностные силы. Это силы, которые воздействуют на контрольную поверхность со стороны вещества, окружающего контрольную поверхность, на вещество внутри контрольной поверхности. Часто поверхностные силы делят на два типа: (i) вызванные нормальным напряжением, или давлением, действующим на контрольной поверхности; (ii) вызванные касательными напряжениями или напряжениями вязкости, действующими на контрольной поверхности.

Силы действующие на поверхность, полученную от пересечения контрольной поверхности с препятствием *должны быть включены* в $\sum \vec{F}$ и в основном включают в себя касательные напряжения или напряжения сжатия в металле. Однако давление жидкости и касательные напряжения, действующие на часть препятствия, находящуюся в контрольном объеме, не входят в $\sum \vec{F}$, поскольку поверхность, на которую они действуют, не является частью контрольной поверхности.

2.3 Уравнения движения.

Итак теоремы импульсов для выделенного контрольного объема \mathcal{V} математически записывается следующим образом:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{\kappa.об.} \rho \vec{V} d\mathcal{V} \quad .$$

Определив \vec{f} X, Y, Z как вектор напряжения массовых сил, с учетом \vec{R} (1.17) как результирующей *поверхностной* силы, действующей на бесконечно малый объем жидкости, можем записать:

$$\sum \vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f} \rho d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \vec{R} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{d}{dt} \rho \vec{V} d\mathcal{V}.$$

Отсюда для течения бесконечно малого элемента жидкости $\left(\frac{d \rho d\mathcal{V}}{dt} = 0 \right)$ получаем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{R}. \quad (2.12)$$

С учетом (1.20) имеем (помня, что $\mu = \nu\rho$):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{3} \nu \text{grad div} \vec{V} + \nu \Delta \vec{V}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) является основным уравнением движения аэрогидродинамики и известно под названием **уравнения Навье-Стокса**.

В координатной форме его можно записать так:

для проекции на ось x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ & = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \end{aligned}$$

для проекции на ось y :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ & = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \end{aligned}$$

для проекции на ось z :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\ & = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера. Полагая в уравнении (2.13) $\mu = 0$, придем к уравнению движения *невязкой* жидкости, полученному и рассмотренному впервые Эйлером:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.14)$$

Или в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Уравнения движения в форме Громеки. Выделяя потенциальную и вихревую части конвективного ускорения, используя известную формулу векторного анализа

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 = \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \times \text{rot} \vec{V}$$

или

$$\frac{1}{2} \text{grad} V^2 = \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} + \vec{V} \times \text{rot} \vec{V},$$

уравнение движения невязкой жидкости можно записать в форме, данной в 1881 году профессором Казанского университета И.С. Громеко:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 - [\vec{V} \times \text{rot } \vec{V}] = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.16)$$

Здесь $d\vec{V}/dt$ представлена в виде суммы локального и конвективного ускорения следующим образом:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad } \vec{V}.$$

Преимущества формы уравнения движения (2.16) в том, что в ней явно выделен вихрь скорости.

В проекциях на оси декартовой системы координат уравнение (2.16) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2 \omega_y w - \omega_z v &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2 \omega_z u - \omega_x w &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{2} \right)^2 + 2 \omega_x v - \omega_y u &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Единицы и размерности. Законы движения Ньютона включают совершенно независимые четыре физические величины: силу, массу, длину и время. Перед установлением закона движения эти единицы были совершенно несвязаны, поэтому Ньютон мог утверждать свой закон в виде пропорции, $F \sim ma$, или

$$F = \frac{1}{g_0} ma,$$

где g_0 — экспериментально определенная постоянная, значение которой зависит только от единиц измерения четырех вышеназванных величин. Однако, как только пропорциональность известна, возможно, переопределить одну из единиц измерения в зависи-

мости от трех других, таким образом уменьшив для исследователя число первоначальных величин.

Эти идеи иллюстрируются следующей таблицей пяти систем единиц.

	Масса	Длина	Время	Сила	g_0
Техническая система	<i>кг</i>	<i>м</i>	<i>сек</i>	<i>кгс</i>	$9,81 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кгс} \cdot \text{сек}^2}$
СИ	<i>кг</i>	<i>м</i>	<i>сек</i>	<i>ньютон</i>	$1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{ньютон} \cdot \text{сек}^2}$
Системы, применяемые в США	<i>lbm</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>lbf</i>	$32,174 \frac{\text{lbm} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}$
	<i>lbm</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>poundal</i>	$1 \frac{\text{lbm} \cdot \text{ft}}{\text{poundal} \cdot \text{sec}^2}$
	<i>slug</i>	<i>ft</i>	<i>sec</i>	<i>lbf</i>	$1 \frac{\text{slug} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}$

В системе СИ, применяемой в данном курсе, g_0 численно равно единице, то есть единицу силы получаем умножая единицу массы на единицу ускорения. Для такой системы единиц мы можем исключить g_0 из математического описания закона и записать

$$F = ma .$$

2.4 Первый закон термодинамики для контрольного объема. Уравнение сохранения энергии.

Первое начало термодинамики гласит:

Изменение энергии термодинамической системы dE равно разности между полученным системой количеством тепла δQ и совершенной ею полезной внешней работой δW

$$dE = \delta Q - \delta W. \quad (2.18)$$

Вспомним, что всякая термодинамическая система обладает энергией E , представляющей собой сумму кинетической энергии движения системы как целого $E^{кин}$, потенциальной энергии $E^{пот}$, обусловленной определенным положением всей системы или ее макроскопических частей в каком-либо внешнем поле сил, внутренней энергии U , которая состоит из собственной энергии отдельных частей, составляющих рассматриваемую систему

$$E = E^{кин} + E^{пот} + U.$$

Если m – масса системы, то обозначая через

$$e = \frac{E}{m} \text{ – энергию системы, отнесенную к единице мас-}$$

сы системы, и

$$u = \frac{U}{m} \text{ – внутреннюю энергию единицы массы систе-}$$

мы, можем записать

$$e = \frac{V^2}{2} + u + gz,$$

где g – местное ускорение гравитационных сил.

Уравнение (2.18) можно записать

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{\delta W}{dt},$$

где $\frac{\partial Q}{\partial t} = Q \left[\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \text{сек}} \right]$ – скорость теплового потока через контрольную поверхность из окружающей среды.

Скорость изменения энергии термодинамической системы записывается в виде

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_{It+dt} + E_{III t+dt} - E_{It} + E_{III t}}{dt} =$$

$$= \frac{E_{It+dt} - E_{It}}{dt} + \frac{\int e \delta m_{III t+dt}}{dt} - \frac{\int e \delta m_{III t}}{dt}.$$

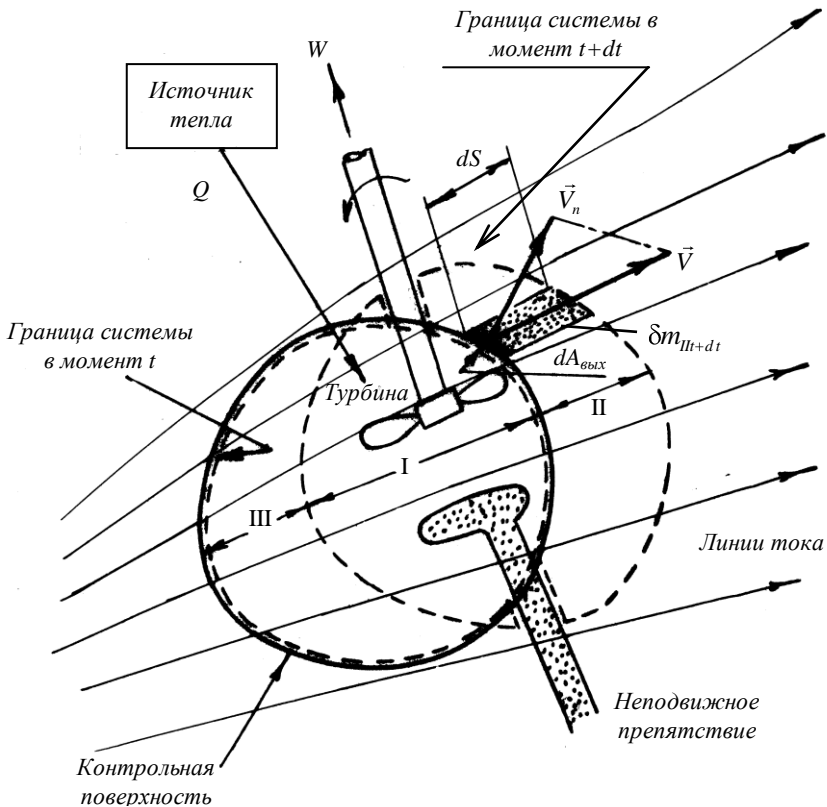


Рис. 2.4 – Течение жидкости через контрольный объём

Так как пространство I совпадает с контрольным объёмом при $dt \rightarrow 0$, можем записать

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{к.об.} + \int e \rho V_n dA_{внх} - \int e \rho V_n dA_{вх} .$$

Скорость производства полезной внешней работы. Опуская из нашего рассмотрения капиллярные, магнитные и электрические силы, работа, произведенная в течение процесса есть результат нормальных и касательных напряжений на движущихся границах системы.

$$\frac{\delta W}{dt} = \left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{норм} + \left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{касат} .$$

Беря нормальные напряжения на границах системы как гидростатическое давление, работа, выполненная системой под влиянием нормальных сил, действующих на элемент площади $dA_{внх}$, равняется $p dA_{внх} dn$, где dn – нормальная к элементу площади $dA_{внх}$ составляющая dS - пути вдоль линии тока.

$$p dA_{внх} dn = \frac{p}{\rho} \rho dA_{внх} dn = p v \cdot \delta m_{лт+дт} .$$

А скорость всей работы, выполненной под действием нормальных напряжений в течение процесса, определяется выражением:

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{норм} = \frac{\int p v \delta m_{лт+дт}}{dt} - \frac{\int p v \delta m_{лт}}{dt} = \int p v \rho V_n dA_{внх} - \int p v \rho V_n dA_{вх} ,$$

так как $\frac{dn}{dt} = V_n$.

Работа, произведенная под действием касательных напряжений может быть разделена на две категории: (i) работа, произведенная частью вала, находящегося *внутри* системы, над частью вала, находящегося *вне* системы, благодаря крутящему моменту, создаваемому касательными напряжениями в плоскости пересечения границы системы с валом

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{вала}} = W ;$$

(ii) работа, произведенная на границах системы над смежной жидкостью, находящейся в движении

$$\left(\frac{\delta W}{dt} \right)_{\text{вязк}} = K .$$

Заметим, что касательные напряжения на стойке неподвижного препятствия не входят в величину K , так как стойка неподвижна. Аналогично, если контрольная поверхность совпадает со стойками трубы или корпусом машины, то K равна нулю (так как корпус или стойки трубы неподвижны) несмотря на то, что здесь могут быть существенные касательные напряжения. С другой стороны K играет важную роль для контрольной поверхности, проходящей в вязком пограничном слое.

Суммируя все полученные слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} Q = & \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} + W + K + \int \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho V_n dA_{\text{вых}} - \\ & - \int \left(u + pv + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho V_n dA_{\text{вх}} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Вспомним, что

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} = \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} e dm = \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} e \rho d\mathcal{V} ,$$

а из термодинамики известно, что энтальпия $i = u + pv$. Используя векторный анализ, можно записать:

$$Q = W + K + \int_{\text{к.об.}} \frac{\partial}{\partial t} e \rho d\mathcal{V} + \oint_{\text{к.пов.}} \left(i + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} . \quad (2.20)$$

Уравнения (2.19) и (2.20) и представляют собой уравнения сохранения энергии в общем виде.

Во многих практических инженерных задачах поток является стационарным и может быть принят одномерным (рис. 2.5).

В этом случае стационарного одномерного потока и при совпадении контрольной поверхности с внутренним корпусом машины $K=0$,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{к.об.}} = 0.$$

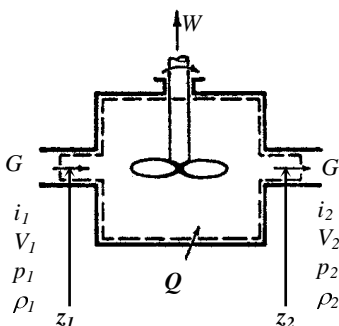


Рис. 2.5 – Одномерное течение

В сечении 1 представлены параметры входящего потока, в сечении 2 – выходящего.

Массовый расход жидкости $G = \text{const.}$

Тогда удобно найти $q = \frac{Q}{G}$, количество тепла, полученное единицей массы протекающей жидкости;

$w = \frac{W}{G}$ – работа вала, отнесенная к единице массы протекающей жидкости. С этими обозначениями уравнение (2.20) упрощается до вида

$$q = w + i_2 - i_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1).$$

Для стационарного одномерного течения жидкости по трубке тока (рис. 2.6) уравнения (2.19) и (2.20) упрощаются.

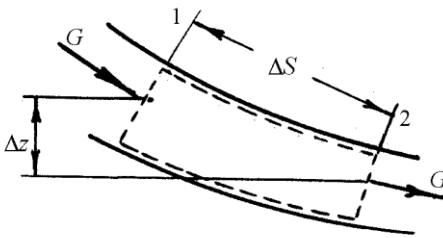


Рис. 2.6 – Одномерное течение жидкости в трубке тока

Обозначим через

$$l = \frac{K}{G} - \text{работу от}$$

сил вязкости на единицу массы протекающей жидкости.

Тогда уравнение сохранения энергии для трубки тока запишется в виде:

$$q = l + u_2 - u_1 + p_2 v_2 - p_1 v_1 + \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) + g z_2 - z_1 ,$$

$$q = l + i_2 - i_1 + \frac{1}{2} V_2^2 - V_1^2 + g z_2 - z_1 .$$

Перейдя к конечным разностям, имеем

$$\Delta q = \Delta l + \Delta u + \Delta p v + \frac{1}{2} \Delta V^2 + g \Delta z ,$$

$$\Delta q = \Delta l + \Delta i + \Delta \frac{V^2}{2} + g \Delta z .$$

Или в дифференциальной форме

$$dq = dl + du + d p v + \frac{1}{2} dV^2 + g dz \quad (2.21)$$

$$dq = dl + di + \frac{1}{2} dV^2 + g dz . \quad (2.22)$$

2.5 Второй закон термодинамики

Второй закон термодинамики для бесконечно малого изменения состояния термодинамической системы аналитически записывается в форме

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{или} \quad s_2 - s_1 \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Для изолированной системы $\delta Q=0$ (адиабатический процесс) со стационарным одномерным течением

$$s_2 \geq s_1. \quad (2.23)$$

Идеальный газ

Уравнение состояния для идеального газа, как известно, имеет вид $p v = R T = \frac{R}{\mu} T$,

где R – универсальная газовая постоянная, равная 8314,19 Дж/к·моль·град.

$$\text{Для воздуха } R = \frac{R}{\mu} = \frac{8314,19}{29} = 287 \text{ Дж / кг} \cdot \text{град}$$

$$R = \frac{n \cdot M^3}{M^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{град}} = \frac{n \cdot M}{\text{кг} \cdot \text{град}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}.$$

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p; \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v,$$

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p = \frac{di}{dT} = \frac{d}{dT} u + p v = \frac{du}{dT} + \frac{d}{dT} RT = c_v + R,$$

так как i является функцией только температуры.

$$c_p = c_v + R; \quad k = c_p / c_v; \quad c_p = \frac{k}{k-1} R;$$

$$c_v = \frac{R}{k-1}; \quad k = \frac{n+2}{n},$$

где n – число степеней свободы молекулы. Так для одноатомных газов $n = 3$, $k = 5/3$. Двухатомные газы (кислород, азот и т.д.) имеют $n = 5$, $k = 7/5$.

Для воздуха при не слишком больших температурах

$$c_p = 1004,5 \frac{\ddot{a}e}{\hat{e}\ddot{a} \cdot \ddot{a}\ddot{a}\ddot{a}}, \quad c_v = 711,5 \frac{\ddot{a}e}{\hat{e}\ddot{a} \cdot \ddot{a}\ddot{a}\ddot{a}}.$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры

$$u = u(v, T),$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv, \quad du = c_v dT + O dv, \quad du = c_v dT.$$

Энтальпия идеального газа также является функцией только температуры, так как оба слагаемых u и $p v$ являются функциями только температуры

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT = c_p dT.$$

Из термодинамики также мы знаем, что $dq = du + p dv$.

Тогда изменение энтропии запишется в виде

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p dv}{T} = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

После интегрирования получаем

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \quad (2.24)$$

Используя уравнение состояния $p v = R T$, имеем

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{v_2}{v_1} = c_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^k; \quad (2.25)$$

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^k \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-k-1}.$$

Для идеального газа уравнение изоэнтروпийного процесса имеет вид

$$p v^k = const.$$

Для баротропной жидкости $\rho = f(p)$.

Вопросы для самопроверки

1. Выведите уравнение неразрывности движения.
2. Получите уравнение количества движения для контрольного объёма.
3. Запишите основное уравнение движения аэродинамики. Какие другие формы уравнения движения Вам известны?
4. Выведите уравнение сохранения энергии в общем виде и его частный случай – для стационарного одномерного течения жидкости по трубке тока.
5. Получите уравнение изменения энтропии для идеального газа.

Задачи.

2.1. Рассмотреть стационарное, без трения течение сжимаемой жидкости в бесконечно малой трубке тока.

а) Показать, используя уравнения неразрывности и количества движения, что

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0; \quad \frac{dp}{\rho} + VdV + g dz = 0.$$

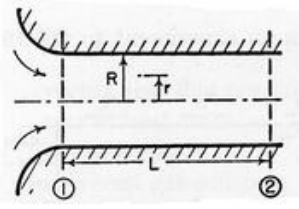
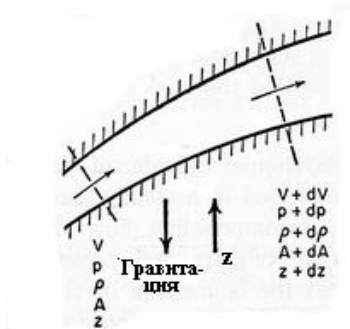
б) Определить интегральные формы этих уравнений для *несжимаемой* жидкости.

2.2. Несжимаемая жидкость течёт в трубе радиусом R . На входе, сечение 1, скорость одинакова во всём поперечном сечении и равна V_1 . В поперечном сечении 2, где течение ламинарное и полностью развившееся, скорость изменяется по радиусу согласно соотношению

$$V = V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

а) Показать, что $V_1/V_{max} = 1/2$.

б) Если $\bar{\tau}_w$ усреднённое касательное напряжение на стенке, тормозящее поток между сечениями 1 и 2, определить падение давления $p_1 - p_2$ в функции V_{max} , ρ , L , R и $\bar{\tau}_w$.



Зад. 2.1.

Зад. 2.2.

2.3. Рисунок изображает струйный насос (эжектор или инжектор), в котором первичный поток жидкости с высокой скоростью в сечении 1 входит во вторичное течение той же жидкости, но с меньшей скоростью в сечении 2. В конце постоянного диаметра смеживающей трубы, то есть в сечении 3, поток тщательно перемешан и однороден по скорости в результате трения между потоками.

Для целей данного анализа предположим, что в сечениях 1 и 2 оба потока имеют одинаковое статическое давление и что касательные напряжения на стенках перемешивающей трубы пренебрежимо малы.

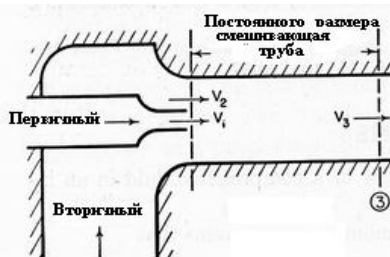
Предположим, что $A_1 = 0,01 \text{ м}^2$, $A_3 = 0,1 \text{ м}^2$, $V_1 = 30 \text{ м/с}$, $V_2 = 3 \text{ м/с}$ и $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Определить V_3 , $p_3 - p_1$.

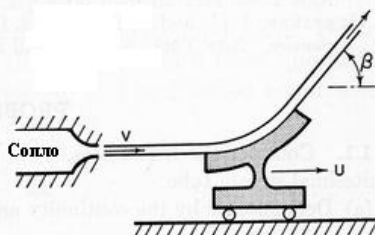
2.4. Рисунок изображает крыло с углом поворота β , которое движется с постоянной скоростью u . По крылу скользит струя, покидающая неподвижное сопло со скоростью V .

а) Предполагая, что крыло смонтировано на рельсах, как показано на рисунке, показать, что производимая работа против сил сопротивления максимальна, когда $u/V = 1/3$.

б) Предполагая, что имеется бесконечно большое количество таких крыльев, связанных с вращающимся колесом, имеющем периферийную скорость u , показать, что работа, производимая колесом максимальна, когда $u/V = 1/2$.



Зад. 2.3.



Зад. 2.4.

2.5. Для экспериментального определения сопротивления, цилиндр диаметром d был помещён в стационарный, двухмерный несжимаемый поток.

Измерения скорости и давления были сделаны на границах показанной контрольной поверхности. Давление было одинаково на всей контрольной поверхности. Компонента скорости вдоль оси x на границе контрольной поверхности была приблизительно определена как показано на рисунке.



Зад. 2.5.

Из измеренных данных подсчитать коэффициент сопротивления цилиндра.

$$C_D = \frac{\text{Сила сопротивления на единицу длины}}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 d}.$$

ГЛАВА 3. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА

3.1 Скорость звука

Определим скорость звука для случая плоской бесконечно малой волны давления, распространяющейся вдоль трубы с постоянным поперечным сечением. Такую волну можно создать, например, лёгким передвижением поршня, расположенном в левом конце трубы.

Фронт волны распространяется равномерно вправо со скоростью a (рис. 3.1*a*). Жидкость, через которую прошёл фронт волны, имеет давление $p+dp$, плотность $\rho+dp$ и движется вправо со скоростью dV . Жидкость перед фронтом волны справа имеет давление p , плотность ρ и неподвижна.

Для упрощения анализа предположим, что наблюдатель движется вместе с фронтом волны. Тогда рис. 3.1*b* показывает процесс относительно движущегося вправо наблюдателя со скоростью a . Жидкость протекает справа налево и как только проходит через фронт волны, её скорость уменьшается с величины a до величины $(a-dV)$. В то же время давление возрастает с p до $p+dp$ и плотность с ρ до $\rho+dp$.

Рассмотрим неподвижную контрольную поверхность, окружающую фронт волны (рис. 3.1*b*). Касательные напряжения на этой контрольной поверхности пренебрежимо малы по сравнению с силами давления. Тогда, используя теорему импульсов, уравнение количества движения в данном случае запишется в виде

$$A[p - p - dp] = G[a - dV - a],$$

где A – поперечное сечение трубы,
 $G = \rho A a$.

Откуда мы получаем

$$dp = \rho a dV$$

(заметим, что dV – уменьшение скорости в направлении движения).

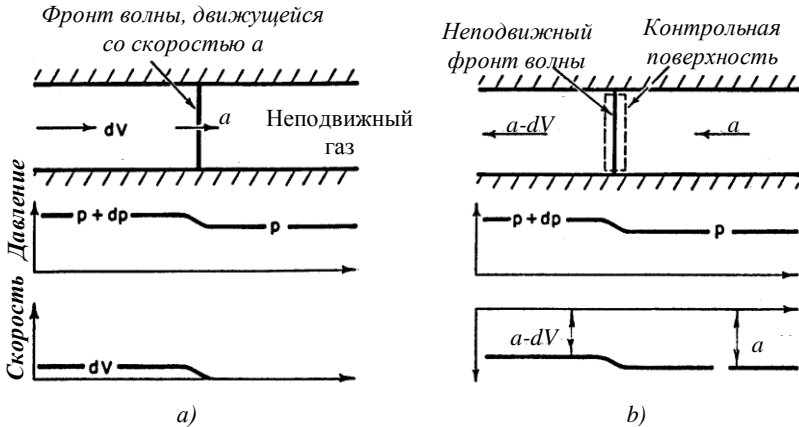


Рис. 3.1 – Распространение бесконечно малого импульса повышения давления: а) по отношению к неподвижному наблюдателю; б) наблюдатель движется вместе с фронтом волны.

Уравнение непрерывности для жидкости, находящейся по обе стороны фронта волны запишется

$$\rho a = \rho + d\rho \quad a - dV = \rho a + a d\rho - \rho dV - \cancel{d\rho dV}^0.$$

Отсюда имеем $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dV}{a}$ или $dV = a \frac{d\rho}{\rho}$.

Подставляя полученное выражение в формулу для dp , получаем

$$dp = \rho \cdot a^2 \cdot \frac{d\rho}{\rho} = a^2 d\rho.$$

Тогда скорость распространения бесконечно малой волны давления, то есть скорость звука, определяется выражением:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad \text{или} \quad a = \sqrt{\partial p / \partial \rho}_s. \quad (3.1)$$

Отношение $dp/d\rho$ записано в уравнении (3.1) как частная производная при постоянной энтропии, так как изменения в давлении и температуре являются бесконечно малыми, процесс близок к обратимому. Более того, быстрота процесса совместно с бесконечно малыми изменениями температуры делает процесс близким к адиабатическому. В пределе для бесконечно малой волны процесс можно считать и адиабатическим, и изоэнтروпийным.

Скорость звука для идеального газа. Для идеального газа зависимости между давлением p и плотностью ρ в изоэнтропийном процессе выражается уравнением

$$\frac{p}{\rho^k} = const$$

Или:

$$\ln p - k \ln \rho = const, \text{ откуда } \frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}; \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = k \frac{p}{\rho} = kRT.$$

Подставляя в (3.1), мы получаем формулу для скорости звука в идеальном газе

$$a = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kRT}. \quad (3.2)$$

Для воздуха ($k = 1,4$) скорость распространения звука

$$a = 20,1\sqrt{T}. \quad (3.3)$$

Волны конечной мощности, обычно называемые скачками уплотнения, всегда распространяются со скоростью большей, чем указано в уравнении (3.1) и скорость распространения увеличивается с возрастанием интенсивности движущегося скачка. Однако этот вопрос будет обсуждён позже.

Для **реального рабочего тела** в качестве независимых переменных можно взять p и i . Тогда уравнение состояния можно записать в виде:

$$T = T(p, i); \quad \rho = \rho(p, i); \quad s = s(p, i). \quad (3.4)$$

Используя выражение для плотности имеем:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial i} di + \frac{\partial \rho}{\partial p} dp. \quad (3.5)$$

Из термодинамики нам известно, что $i = u + pv$, откуда $di = du + pdv + vdp$. Отсюда $du + pdv = dq = di - dp/\rho$.

Для адиабатного и изоэнтропийного процесса $dq = 0$. Тогда

$$di = dp/\rho. \quad (3.6)$$

Из (3.5) с учётом (3.6) получаем

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial i} \cdot \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial p} dp = \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) dp.$$

Из вышеизложенного следует, что

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{s=const} = a^2 = \frac{\rho}{\frac{\partial \rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial p}};$$

$$a^2 = \rho / \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial p} \right), \text{ или } a = \sqrt{\rho / \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) является уравнением скорости звука для реального рабочего тела.

В случае идеального рабочего тела:

$$T = \frac{1}{c_p} i; \quad \rho = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i}; \quad s = c_p \ln i - R \ln p. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial i} = -\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{1}{i}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{i};$$

$$a^2 = \frac{\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i}}{\frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{c_p}{R} \cdot \frac{1}{i} - \frac{c_p}{R} \cdot \frac{p}{i} \cdot \frac{1}{i}} = \frac{Ri}{c_p - R} = \frac{Rc_p T}{c_p - c_p + c_v} = kRT.$$

Мы получили (как и следовало ожидать) ранее выведенную формулу (3.2) для скорости звука в идеальном газе.

3.2 Различные формы уравнения энергии

I. Для идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии теплообмена между выделенной струйкой и окружающей средой уравнение (2.21) существенно упрощается:

$dl = 0$ – вязкость отсутствует;

$dq = 0$, значит $du = 0$, так как в несжимаемой жидкости внутренняя энергия определяется количеством подведенного тепла.

Тогда мы имеем

$$\frac{1}{2} dV^2 + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0.$$

Интегрируя это выражение вдоль струйки тока, находим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{const}. \quad (3.9)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли для струйки идеальной несжимаемой жидкости*.

II. Для установившегося движения идеальной сжимаемой жидкости, также в случае отсутствия теплообмена между выделенной струйкой и окружающей средой уравнение (2.22) принимает вид

$$di + \frac{1}{2} dV^2 + g dz = 0.$$

Интегрируя это уравнение вдоль струйки тока, получаем

$$i + \frac{V^2}{2} + gz = i_0 = \text{const} . \quad (3.10)$$

III. Согласно первому закону термодинамики $dq = du + pdv$.

Подставим это выражение в уравнение (2.21). В случае установившегося движения идеальной сжимаемой жидкости имеем

$$du + pdv = du + d \quad pv + \frac{1}{2} dV^2 + g dz,$$

$$du + pdv = du + pdv + vdp + \frac{1}{2} dV^2 + g dz.$$

Получаем уравнение энергии для струйки газа в дифференциальной форме, содержащее только механические величины:

$$\frac{1}{2} dV^2 + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0. \quad (3.11)$$

Интегрируя это выражение, запишем

$$\frac{V^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const} .$$

Для изоэнтروпийного процесса

$$\rho = \rho \quad p , \quad \text{так как} \quad \frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} .$$

Отсюда мы имеем

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\rho} &= \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \cdot \frac{1}{1-1/k} p^{1-1/k} = \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} p^{k-1/k} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p^{1/k}}{\rho} p^{k-1/k} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в вышеприведенное уравнение, получаем

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = const. \quad (3.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Бернулли для струйки идеальной сжимаемой жидкости*.

IV. Будем пренебрегать составляющей gz для газа. Тогда, обозначив p_0 , ρ_0 , T_0 параметры торможения, из уравнения (3.12) получаем

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} RT_0. \quad (3.13)$$

Вспомнив уравнение (3.2), можем записать

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (3.14)$$

где a_0 – скорость распространения звука в полностью заторможенной среде.

Можно также записать

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{V_{max}^2}{2}, \quad (3.15)$$

где V_{max} – максимальная скорость, соответствующая истечению газа в пустоту ($i = 0, p = 0, T = 0$).

Согласно (3.14) вдоль оси трубки тока с увеличением скорости V скорость звука a падает. В одном из сечений возможен случай, когда

$$V = a = a_*.$$

Тогда (3.14) запишется как

$$\frac{a_*^2}{2} + \frac{a_*^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2},$$

а уравнение энергии примет вид

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}, \quad (3.16)$$

здесь a_* – скорость течения, равная местной скорости звука, называемая *критической скоростью*.

Приравнивая правые части уравнений (3.13)-(3.16), получаем

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{k-1} = \frac{V_{max}^2}{2} = \frac{a_*^2}{2} \cdot \frac{k+1}{k-1}.$$

Отсюда получаем выражения для характерных скоростей потока через параметры торможения:

$$\left. \begin{aligned}
 V_{max} &= \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}; & \text{Для воздуха, имеющего} \\
 & & \text{стандартные параметры в} \\
 & & \text{состоянии покоя,} \\
 & & V_{max}=760\text{м/сек} \\
 a_* &= \sqrt{\frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}}; & \text{Для воздуха } k=1,4 \\
 V_{max} &= a_0 \sqrt{\frac{2}{k-1}}; & \frac{V_{max}}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} = 2,24; \\
 a_* &= a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}; & \frac{a_*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = 0,913; \\
 \frac{V_{max}}{a_*} &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}; & \frac{V_{max}}{a_*} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

3.3 Газодинамические функции одномерного адиабатического потока

Обозначим

$$\frac{V}{a} = M \quad \text{— число Маха.}$$

Этот безразмерный параметр очень удобен, но имеет два недостатка:

- (i) он зависит не только от скорости;
- (ii) при больших скоростях стремится к бесконечности.

Поэтому часто пользуются другим безразмерным параметром

λ

$$\lambda = \frac{V}{a_*} \quad \text{— коэффициент скорости.}$$

Запишем уравнение энергии (3.16)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}$$

Разделив на a_*^2 , получаем

$$\frac{V^2}{2a_*^2} + \frac{1}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{1}{2}.$$

Или

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1}.$$

С другой стороны мы можем записать

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a_*^2} = M^2 \frac{a^2}{a_*^2}.$$

Исключая a^2/a_*^2 из этих двух уравнений, мы получаем выражение через M и λ для адиабатического потока:

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{k+1}{k-1},$$

$$\frac{k-1}{2} \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{M^2} = \frac{k+1}{2}; \quad \frac{k-1}{2} + \frac{1}{M^2} = \frac{k+1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}, \quad (3.18)$$

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}. \quad (3.19)$$

Из уравнений (3.18) и (3.19) мы видим, что, если $M < 1$, тогда $\lambda < 1$, если $M > 1$, тогда $\lambda > 1$, когда $M = 1$, тогда $\lambda = 1$, когда $M = 0$, тогда $\lambda = 0$, когда $M = \infty$, тогда $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45$ для $k = 1,4$.

В дозвуковом потоке число Маха меньше числа λ , в сверхзвуковом потоке число M больше λ .

Запишем уравнение энергии в форме (3.13)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} RT_0.$$

Отсюда, помня, что (3.2) $a^2 = k \frac{p}{\rho}$, а также уравнение состояния $\frac{p}{\rho} = RT$, мы можем записать

$$\frac{V^2}{a^2} + \frac{2}{k-1} = \frac{2}{k-1} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

Откуда имеем

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (3.20)$$

Отношения для давления, температуры и плотности для изоэнтропийного процесса идеального газа имеют вид

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k; \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Подставляя эти соотношения в (3.20), получаем

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$
(3.21)

В практике расчётов часто используют газодинамические функции в зависимости от числа λ .

Для этого снова запишем уравнение энергии (3.16)

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{a_*^2}{2}.$$

Разделив на a_* , получаем

$$\lambda^2 + \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Вспомнив, что (3.17) $a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}$, можем записать

$$\frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_*^2} = \frac{2}{k-1} \cdot \frac{a^2}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{RT}{RT_0} = \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Тогда мы имеем

$$\lambda^2 + \frac{k+1}{k-1} \cdot \frac{T}{T_0} = \frac{k+1}{k-1}$$

или

$$\frac{k-1}{k+1} \lambda^2 + \frac{T}{T_0} = 1.$$

Отсюда получаем

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2.$$
(3.22)

Используя ранее приведенные соотношения для изэнтропийного процесса идеального газа, можем записать

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Параметры газа, скорость движения которого равна по величине местной скорости звука в газе, называются *критическими параметрами*. Критическим параметрам соответствует число $M = \lambda = 1$.

Тогда из формул (3.20)–(3.21) или лучше из формул (3.22)–(3.23) вытекает

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3.24)$$

При $k = 1,4$ имеем

$$\frac{T_*}{T_0} = 0,833; \quad \frac{p_*}{p_0} = 0,5283; \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = 0,634; \quad a_* = 18,3\sqrt{T_0}.$$

Последнюю формулу получаем из (3.17) $a_* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}$ и (3.3)

$$a_0 = 20,1\sqrt{T_0}; \quad a_* = 20,1\sqrt{2/k+1}\sqrt{T_0} = 18,3\sqrt{T_0}.$$

Для получения газодинамической функции расхода воспользуемся уравнением расхода (2.8)

$$\rho AV = G = const.$$

Рассмотрим удельный расход (расход через единицу площади):

$$\frac{G}{A} = \rho V.$$

Максимальный расход через единицу площади будет в минимальном сечении A_* , где параметры газа будут ρ_*, p_*, T_* , а скорость $V = a_*$.

$$\frac{G}{A_*} = \rho_* a_*.$$

Обозначим $q = \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{A_*}{A}$ – приведенный секундный расход.

$$q = \frac{\rho V}{\rho_* a_*} = \frac{\rho_0}{\rho_*} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \lambda.$$

Используя уравнения (3.24) и (3.23), получаем

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \lambda \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (3.25)$$

Подставляя сюда выражение (3.18) для λ через M , мы также получаем

$$q = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{2k-1}} \cdot M \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{k+1}{2k-1}}. \quad (3.26)$$

Или в более удобной записи

$$q = \lambda \cdot \left[\left(\frac{k+1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}, \quad (3.27)$$

$$q = M \cdot \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \cdot \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{k+1}{2k-1}}. \quad (3.28)$$

Для точных расчётов газодинамические функции протабулированы для изэнтропийного потока при различных значениях k с

числом M или λ в качестве независимой переменной (таблица 1 в приложении).

Использование газодинамических функций лучше всего объяснить на примере.

Пример. Сверхзвуковое сопло спроектировано для $M = 2$ с площадью горла сопла $0,01 \text{ м}^2$. Давление и температура на входе в сопло, где скорость пренебрежимо мала, равны соответственно 5 бар и 100°C . Конструктор основывался на допущении, что поток изэнтропийный с $k = 1,4$, одномерный в горле и в рабочей части сопла. Определить массовый расход, площадь рабочей части сопла и параметры потока в горле сопла и в рабочей части сопла.

$$p_0 = 5 \text{ бар}, \quad T_0 = 273,15 + 100 = 373,15^\circ \text{ K},$$

$$1 \text{ бар} = 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad R = 287 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{град}} = 287 \frac{\text{дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{5 \cdot 10^5}{287 \cdot 373,15} = 4,67 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$a_0 = 20,1 \sqrt{T_0} = 20,1 \sqrt{373,15} = 388 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Далее определяем свойства в горле, взяв из таблицы 1 при $M = \lambda = 1$

$$p_*/p_0 = 0,528; \quad p_* = 5 \cdot 0,528 = 2,54 \text{ бар};$$

$$T_*/T_0 = 0,833; \quad T_* = 0,833 \cdot 373,15 = 310^\circ \text{ K};$$

$$\rho_*/\rho_0 = 0,634; \quad \rho_* = 0,634 \cdot 4,67 = 2,96 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$a_*/a_0 = \sqrt{T_*/T_0} = 0,913; \quad a_* = V_* = 354 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Используя таблицу теперь мы можем подсчитать параметры в рабочей части сопла:

$$\lambda = \frac{V}{a_*} = 1,633; \quad V = 1,633 \cdot 354 = 579 \frac{\text{м}}{\text{сек}};$$

$$p/p_0 = 0,1278; \quad p = 0,1278 \cdot 5 = 0,64 \text{ бар};$$

$$\rho/\rho_0 = 0,23; \quad \rho = 0,23 \cdot 4,67 = 1,074 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$T/T_0 = 0,556; \quad T = 0,556 \cdot 373,15 = 207^\circ \text{K};$$

$$A_*/A = q = 0,59; \quad A = 0,01/0,59 = 0,0169 \text{ м}^2.$$

В заключении определим массовый расход воздуха

$$G = \rho_* A_* V_* = 2,96 \cdot 0,01 \cdot 354 = 10,48 \frac{\text{кг}}{\text{сек}}.$$

3.4 Классификация течения сжимаемой жидкости

Используя уравнения (3.14) и (3.15), мы можем записать

$$V^2 + \frac{2}{k-1} a^2 = \frac{2}{k-1} a_0^2 = V_{\text{max}}^2.$$

Согласно этому выражению возможно все состояния в трубке тока представить в виде диаграммы a в функции V , называемой *эллипсом стационарного течения*.

Различные части эллипса представляют схематически различные области течения сжимаемой жидкости, имеющие существенно различные физические характеристики.

Течение несжимаемой жидкости. Скорость является небольшой по сравнению со скоростью звука. Изменения в a являются весьма малыми по сравнению с изменениями в V .



Рис. 3.2 – Эллипс стационарного адиабатического течения, показывающий области влияния сжимаемости

Дозвуковое течение. Скорость V и скорость звука a являются сравнимыми величинами, но $V < a$. Число Маха M изменяется в результате изменения V и только незначительно от изменения скорости звука a .

Трансзвуковое течение. Разница между V и a является очень малой по сравнению с величинами V и a . Изменения в V и a являются сравнимыми величинами.

Сверхзвуковое течение. Скорость V и скорость звука a являются сравнимыми величинами, но $V > a$. Изменения в числах M имеют место в результате обоюдного изменения V и a .

Гиперзвуковое течение. Скорость течения V очень большая по сравнению со скоростью звука a . Изменения в V являются очень малыми и изменения числа Маха являются результатом изменения скорости звука a .

3.5 Основы физического моделирования

Проверять каждое новое решение и эффективность каждого нового конструкционного изменения в натуральных условиях весьма

сложно, а часто и принципиально невозможно. По этой причине основные экспериментальные исследования проводятся на модельных установках, где могут использоваться различные рабочие тела, а сами испытания проводятся при скоростях и параметрах жидкости, отличающихся от натурных. Поэтому в аэродинамике особую важную роль играет *теория подобия* потоков, так как она устанавливает возможность перенесения экспериментальных данных, полученных при испытаниях на модели, на натуральный объект.

Два потока называются подобными, если в любых сходственных точках и в любые сходственные моменты времени масштабы однородных величин, характеризующих эти потоки, являются постоянными. Такое подобие называется *полным*. Если же этому условию удовлетворяют не все масштабы, а только часть из них, то подобие называется *частичным*.

Для обеспечения подобия моделируемых течений или явлений необходимо обеспечить равенство некоторых безразмерных комплексов, которые называют *критериями (числами) подобия*.

Критерии подобия можно установить путём записи основных уравнений движения вязкой жидкости *в безразмерной форме*. Для полного подобия двух потоков безразмерные формы уравнений должны быть тождественными, то есть постоянные коэффициенты, стоящие перед безразмерными членами, должны быть одинаковы. Эти коэффициенты и есть критерии подобия:

$$\frac{l}{Vt} = Sh \quad - \text{число Струхала, является важным критерием не-}$$

стационарного движения. l – линейный характерный размер тела; V – скорость; t – характерное время (например $1/t = f$ – частота колебаний).

$\frac{V}{\sqrt{lg}} = Fr$ – число Фруда. Оценивает роль массовых сил в про-

цессе движения жидкости.

$\frac{p}{\rho V^2} = Eu$ – число Эйлера.

$\frac{Vl}{\nu} = Re$ – число Рейнольдса. Характеризует влияние сил вяз-

кости. $\nu = \mu/\rho$ – кинематический коэффициент вязкости.

$\frac{C_p \mu}{\lambda} = Pr$ – число Прандтля. Характеризует обмен энергией в

вязком газе посредством теплопередачи (λ – коэффициент теплопроводности).

$\frac{V}{a} = M$ – число Маха. Характеризует сжимаемость рабочего тела.

Таким образом, движения подобны, если для них одинаковы числа: Sh, Fr, M, Re, Pr, Eu, k .

В отдельных случаях некоторые из условий могут выпадать. В случае стационарного течения из рассмотрения выпадает число Sh ; в задачах, где влияние массовых сил несущественно, можно во внимание не брать число Fr ; отсутствие теплообмена убирает из рассмотрения критерий Pr .

Одновременное моделирование по всем критериям зачастую невозможно. Так в случае стационарного течения гидрогазодинамики одновременное подобие по числам M и Re при сохранении неизменными параметров потока натуры и модели невозможно. Например, при уменьшении масштаба геометрического моделирования в

два раза необходимо для поддержания постоянства Re увеличить скорость потока в два раза, а, следовательно, увеличить в 2 раза по сравнению с натурой число M . Одновременное моделирование по указанным критериям требует использования аэродинамических труб переменной плотности, когда сохранение неизменным Re осуществляется не посредством изменения скорости, а за счёт изменения плотности потока. Установки подобного рода оказываются достаточно сложными и дорогостоящими. В результате и в случае сжимаемой жидкости приходится пользоваться частичным моделированием, принимая в качестве определяющего критерия число M , а влияние Re учитывать косвенным образом посредством введения соответствующего поправочного коэффициента. Часто этот коэффициент вообще оказывается близким к единице. Как показывают опытные данные, для большинства задач при $Re > 5 \cdot 10^5$ его влияние становится несущественным. Наступает так называемая *практическая автомодельность* по этому критерию, и в области автомодельности единственным критерием остаётся число M . Влияние показателя изэнтропы k в аэродинамике также оказывается несущественным, и это обстоятельство допускает широкое варьирование рабочими телами при моделировании.

Значительные трудности возникают обычно при моделировании турбулентных потоков, так как получить на модели турбулентный поток, идентичный по всем характеристикам натурному, нельзя. И здесь также ограничиваются частичным моделированием, используя в качестве критерия только степень турбулентности E_0 .

Если представить мгновенную скорость потока V в виде суммы среднестатистической скорости \bar{V} , не зависящей от времени, и пульсационной составляющей V' , меняющей своё значение с тече-

нием времени, то при наличии пульсаций по всем трём координатным осям ($u = \bar{u} + u'$; $v = \bar{v} + v'$; $w = \bar{w} + w'$) степень возмущённости внешнего потока может быть охарактеризована степенью турбулентности внешнего потока E_0 . Эта величина равна отношению среднеквадратических пульсаций скорости к среднестатистической продольной скорости

$$E_0 = \frac{\sqrt{1/3 (\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)}}{\bar{u}}.$$

Таким образом, на практике вся критериальная база подобия обычно не сохраняется и осуществляется только частичное подобие.

Несмотря на это, при решении любой задачи моделирования всегда необходимо иметь полную базу. Отбрасывание того или иного критерия возможно только после детального анализа его роли в исследуемом процессе, причём совершенно ясно, что частичное моделирование является вынужденной мерой и в некоторых случаях может приводить к заметным ошибкам, которые далеко не всегда удаётся предвидеть.

3.6 Одномерные течения при различных внешних воздействиях

В качестве внешних воздействий на одномерный поток могут быть:

1. изменение поперечной площади канала;
2. трение на ограничивающих стенках канала;
3. сопротивление внутри помещённых тел;
4. теплообмен с внешней средой;
5. химические реакции;
6. изменение фаз, то есть испарение или конденсация воды или топлива;

7. смешение газа, который подводится к основному потоку;
8. изменение в молекулярном весе и удельной теплоёмкости, вызванное горением, испарением, подводом газа и т.д.

Мы будем рассматривать не одновременное воздействие всех или большей части указанных факторов (хотя такая задача решается и решена), а отдельных из них с целью более детального качественного анализа.

I. Течение при изменяющейся поперечной площади канала.

Прологарифмировав, а затем продифференцировав уравнение неразрывности для струйки тока (2.8) имеем:

$$d \ln \rho V A = 0; \quad d \ln \rho + d \ln V + d \ln A = 0.$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad \frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}. \quad (3.29)$$

Из дифференциального уравнения энергии для струйки тока (2.21) в случае отсутствия трения ($dl = 0$) имеем:

$$\frac{1}{2} dV^2 + \frac{dp}{\rho} = 0, \quad dp = -\rho V dV, \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\rho V^2}. \quad (3.30)$$

Подставляя в уравнение (3.29) значение dV/V , имеем

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dp} \right).$$

Так как мы рассматриваем изоэнтропийное течение, то $dp/d\rho = \partial p / \partial \rho_s = a^2$ и следовательно

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} (1 - M^2) = \frac{1 - M^2}{\rho V^2} dp = \frac{dV}{V} (M^2 - 1).$$

Здесь мы воспользовались выражением (3.30) для dp
 $dp = -\rho V dV$.

Тогда имеем

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA/A}{M^2 - 1}. \quad (3.31)$$

Проведём качественный анализ этой зависимости.

1. Дозвуковое течение ($M < 1$). Если труба суживается в направлении течения ($dA < 0$), то скорость потока возрастает, так как $dV > 0$. Если труба расширяется ($dA > 0$), то скорость вдоль трубы уменьшается ($dV < 0$).

2. Сверхзвуковое течение ($M > 1$). Сверхзвуковой поток ведёт себя противоположно дозвуковому. В суживающемся канале ($dA < 0$) скорость уменьшается ($dV < 0$), а в расширяющемся – возрастает ($dV > 0$).

Следовательно, для того, чтобы разогнать дозвуковой поток до сверхзвуковой скорости, необходимо сначала суживать трубу, а затем расширять. Переход через скорость звука ($M = 1$) может произойти только в минимальном сечении канала, так как при $M = 1$ только при $dA = 0$ левая часть уравнения (3.31) не становится бесконечно большой. Такие каналы называются *соплами Лавалья*. Он впервые применил их в паровых турбинах для получения сверхзвуковых скоростей.

II. Движение в трубе постоянного сечения с трением.

Течение сжимаемого газа в трубах постоянного сечения имеет место во многих инженерных областях, включая электростанции, химические предприятия, газоперекачивающие магистрали и т.д.

Получим дифференциальные соотношения для идеального газа.

1. Из уравнения состояния

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}. \quad (3.32)$$

2. Из выражения для числа Маха идеального газа

$$M^2 = \frac{V^2}{kRT} \Rightarrow \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dV^2}{V^2} - \frac{dT}{T}. \quad (3.33)$$

3. Из уравнения энергии идеального газа

$$c_p dT + d \frac{V^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.34)$$

Это выражение получаем, деля уравнение энергии идеального газа на $c_p T$, где

$$\frac{dV^2/2}{c_p T} = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{dV^2}{kRT} = \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2}.$$

4. Из уравнения неразрывности ($A = const$)

$$G = \rho VA = const \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.35)$$

5. Из уравнения количества движения для контрольной поверхности (рис. 3.3):

$$\frac{\pi D^2}{4} [p - p + dp] - \pi D dx \tau_w = G V + dV - GV = \frac{\pi D^2}{4} \rho V^2 \frac{dV}{V},$$

$$-dp - 4\tau_w \frac{dx}{D} = \rho V^2 \frac{dV}{V}; \quad \frac{dp}{\rho V^2} + 4 \frac{\tau_w}{\rho V^2} \frac{dx}{D} + \frac{dV}{V} = 0;$$

$$\rho V^2 = \rho M^2 k \frac{p}{\rho} = k p M^2.$$

Тогда
$$\frac{dp}{k p M^2} + 2 \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} \cdot \frac{dx}{D} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0.$$

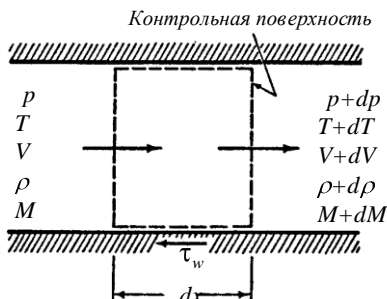


Рис. 3.3 – Контрольная поверхность при анализе адиабатного течения в трубе постоянного сечения с трением

Определим коэффициент трения f как отношение величины касательного напряжения на стенке к динамическому напору основного потока

$$f \equiv \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2}.$$

Тогда получаем

$$\frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{2} 4f \frac{dx}{D} + \frac{kM^2}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = 0. \quad (3.36)$$

6. Используя уравнение (3.21) $p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$, полу-

чаем

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2/2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM^2}{M^2}. \quad (3.37)$$

Шесть уравнений (3.32)–(3.37) позволяют определить шесть дифференциальных переменных dp/p , $d\rho/\rho$, dT/T , dM^2/M^2 , dV^2/V^2 и dp_0/p_0 , выбрав в качестве независимой переменной выражение $4f dx/D$. Выбор независимой переменной основывается на том факте, что физическое воздействие, вызывающее изменение состояния рабочего тела, является вязкое трение.

Используя (3.32) и (3.34), получаем

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2}.$$

Исключая $d\rho/\rho$ с помощью (3.35), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} - \frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2} M^2\right) \frac{dV^2}{V^2} = \\ &= -\frac{1 + k-1 M^2}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2}. \end{aligned}$$

Используя (3.36) для замены dV^2/V^2 , получаем следующее соотношение

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kM^2 \left[1 + \frac{k-1}{2} M^2\right]}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.38)$$

Из уравнения (3.36), исключая dp/p с помощью (3.38), имеем

$$\frac{dV}{V} = \frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}, \quad (3.39)$$

Используя (3.34):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{k-1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} = -\frac{k}{2} \frac{k-1}{1-M^2} M^4 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.40)$$

С помощью (3.35) получаем:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dV^2}{V^2} = -\frac{kM^2}{2(1-M^2)} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.41)$$

Используя (3.33), (3.39) и (3.40), имеем:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{1 - M^2} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.42)$$

Наконец из (3.37)

$$\frac{dp_0}{p_0} = -\frac{kM^2}{2} 4f \frac{dx}{D}. \quad (3.43)$$

Направления в изменениях свойств потока в соответствии с (3.38)-(3.43) зависят от величины числа M (больше или меньше единицы). Это связано с наличием в знаменателях уравнений выражения $1 - M^2$. В итоге мы можем заключить:

	Дозвук	Сверхзвук
Давление, p	уменьшается	увеличивается
Число Маха, M	увеличивается	уменьшается
Скорость, V	увеличивается	уменьшается
Температура, T	уменьшается	увеличивается
Плотность, ρ	уменьшается	увеличивается
Давление торможения, p_0	уменьшается	уменьшается

Мы видим, что число Маха всегда стремится к единице. Плавный переход от дозвука в сверхзвук, или от сверхзвука в дозвук невозможен. Если $M < 1$, то на некотором расстоянии, которое называют критической длиной трубы, поток достигает критической скорости ($M = 1$). Если критическая скорость достигается, то критическое сечение обязательно должно совпадать с выходным сечением трубы.

На первый взгляд вызывает удивление тот факт, что трение ускоряет поток в дозвуковой зоне, и возможно ещё более удиви-

тельным является тот факт, что трение вызывает увеличение давления в сверхзвуковой зоне течения.

Линия Фанно. Рассмотрим стационарное течение рабочего тела в трубе (рис. 3.4). В случае отсутствия трения и теплообмена с внешней средой основными уравнениями, описывающими процесс движения, будут:

1. Уравнение энергии

$$i_1 + V_1^2/2 = i_2 + V_2^2/2. \quad (3.44)$$

2. Уравнение расхода

$$G/A = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2. \quad (3.45)$$

3. Уравнение изменения количества движения

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2. \quad (3.46)$$

Получаем из

$$p_1 - p_2 \quad A = G \quad V_2 - V_1 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \quad A.$$

4. Уравнения состояния

$$\rho = \rho(p, i), \quad T = T(p, i), \quad s = s(p, i). \quad (3.47)$$

Для фиксированного состояния ®, используя уравнение энергии (3.44), расхода (3.45) и состояния (3.47), в i - s диаграмме можно легко построить совокупность состояний ©, которые образуют кривую, проходящую через точку 1, называемую *линией Фанно* (рис. 3.5).

Построение можно осуществить следующим образом: задаёмся значением V_2 , затем ρ_2 определяем из (3.45), i_2 считаем с помощью (3.44), p_2 находим, используя $\rho = \rho(p, i)$, s_2 определяем по $s = s(p, i)$.

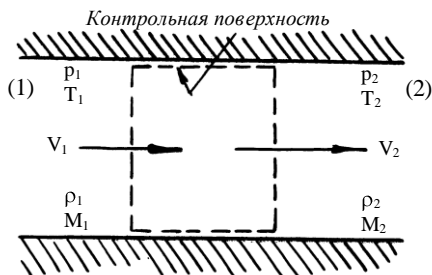


Рис. 3.4 – Контрольная поверхность при анализе течения в трубе постоянного сечения

Повторяя вышеназванные вычисления для различных величин V_2 , линия Фанно легко может быть построена. Так как мы не принимаем во внимание уравнение количества движения, то линия Фанно представляет состояния с одинаковым

массовым расходом на единицу площади и одинаковой энтальпией торможения, но не обязательно с одинаковым силовым воздействием на контрольную поверхность. В общем случае, наличие трения в трубе и приводит из состояния \textcircled{R} вдоль линии Фанно в любое другое состояние.

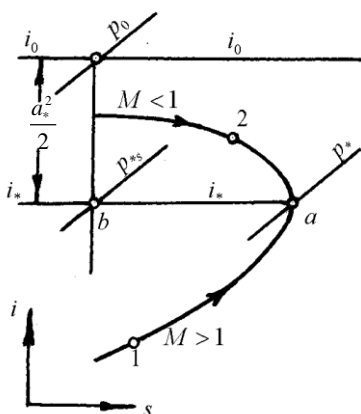


Рис. 3.5 – Линия Фанно

Линия Фанно (рис. 3.5) и изображает процесс течения в трубе постоянного сечения с трением в i - s диаграмме.

Подчеркнем, что критическое давление при течении с трением не равно критическому давлению при изоэнтропийном движении, хотя критические скорости в обоих случаях одинаковы. Критическим параметром при изоэнтропийном течении со-

ответствует точка b , в то время как при течении в трубе с трением критическим параметром на i - s диаграмме соответствует точка a и, следовательно, критическому расходу через трубу.

Опыт показывает, что режимы со сверхзвуковой скоростью на входе в трубу оказываются неустойчивыми и процесс идёт с образованием скачков уплотнения.

III. Движение в канале постоянного сечения с тепловым воздействием.

Будем рассматривать процесс без трения, но с изменением заторможенной энтальпии или температуры торможения.

Такой процесс трудно достичь на практике. Если температура торможения возрастает или падает вследствие теплообмена с внешней средой, связь механизмов трения и теплопередачи обеспечивает наличие трения. Аналогично, если заторможенная температура изменяется в результате сгорания, меняется химический состав. Далее, изменение температуры торможения вследствие испарения жидкости в газовом потоке означает, что и массовый расход и химическая структура изменяются.

Несмотря на это, многие весьма важные для практики выводы можно получить путём анализа процесса, так называемого простого T_0 изменения. Эти выводы справедливы, когда отклонения от допущенной модели незначительны. Например, в случае теплообмена с внешней средой эффектом трения на единицу длины трубы можно пренебречь, когда разность температур между стенкой трубы и движущимся потоком большая. Сгорание отдельных видов топлива в воздушной среде (например, водорода) приводит к незначительному изменению химического состава по сравнению с эффектом изменения температуры торможения.

уменьшением. В дозвуковой зоне число Маха увеличивается с подогревом и уменьшается с охлаждением. При сверхзвуковой скорости, наоборот, число Маха уменьшается с подводом тепла и увеличивается с охлаждением.

Итак, подвод тепла к дозвуковому потоку приводит к возрастанию скорости газа до достижения скорости звука. Дальнейшее ускорение потока возможно путём отвода теплоты. Рассматриваемый канал постоянного сечения называют *тепловым соплом*.

То есть подвод тепла, как и трение, всегда имеет тенденцию приблизить число Маха к единице. Охлаждение изменяет значение числа Маха в направлении удаления от $M = 1$.

При подводе тепла как при сверхзвуковом, так и дозвуковом течении, количество подведенного тепла не может быть больше такого, которое обеспечивает на выходе число $M = 1$.

Если подводимое тепло слишком велико, происходит *запирание* потока, то есть первоначальное значение числа Маха будет уменьшено до величины, которая позволит подвести тепло.

При горении или химических реакциях возможно появление в потоке *тепловых скачков*, когда выделение теплоты происходит на очень малом участке канала.

Реальными оказываются тепловые скачки двух типов:

1) $M_1 > 1$ и $M_2 < 1$ – сверхзвуковые скачки, в которых выделение теплоты сопровождается сжатием газа ($p_2 > p_1$);

2) $M_1 < 1$ и $M_2 < 1$ – дозвуковые скачки, в которых выделение теплоты сопровождается разрежением газа ($p_2 < p_1$).

О том, что в точке a линии Релея (рис. 3.6) скорость достигает скорости звука можно показать, получив для данного случая выражение для скорости потока через изменение плотности и давления:

$$p + \rho V^2 = \text{const}, \quad (3.48)$$

$$\rho VA = G = \text{const} . \quad (3.49)$$

Из уравнения неразрывности (3.49)

$$V = \frac{G}{A} \cdot \frac{1}{\rho}; \quad V^2 = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \quad \rho V^2 = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Подставляя полученное значение ρV^2 в (3.48) имеем:

$$p + \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho} = \text{const}; \quad dp = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2}; \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{G^2}{A^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} = V^2 .$$

То есть для процесса течения, соответствующего линии Релея,

$$V = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} . \text{ Для точки } a:$$

$$V_a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = V_* = a_* .$$

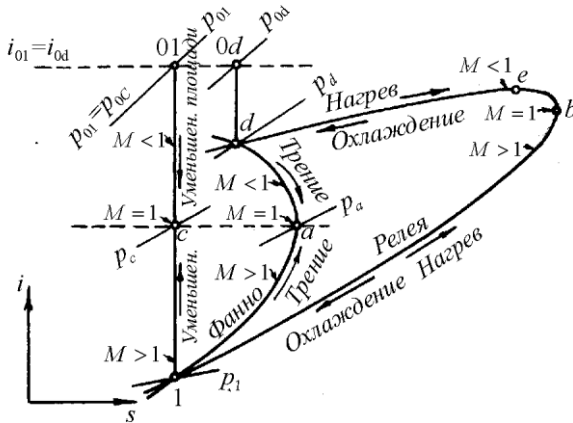


Рис. 3.7 – Сравнение кривых процессов одномерного течения в i - s диаграмме для случаев простого изменения площади, течения с трением и изменением полной энтальпии i_0 (подвод и отвод тепла). Точка 1 характеризует начальное состояние рабочего тела, точки c , a и b соответствуют условию $M=1$.

На рис. 3.7 показаны в $i-s$ диаграмме кривые состояний, берущие своё начало в точке 1, соответствующие течению при изменяющейся поперечной площади канала, течению в трубе постоянного сечения с трением и течению в канале постоянного сечения с подводом (отводом) тепла.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяется скорость звука для идеального газа и реального рабочего тела?
2. Какие формы уравнения энергии Вам известны?
3. Как подсчитать параметры изоэнтропийного торможения?
4. Как подсчитать критические параметры?
5. Получите выражение для характерных скоростей потока через параметры торможения.
6. Каковы условия подобия физических явлений?
7. Что такое критерии подобия и как их вычислить?
8. Получите соотношение газодинамических функций одномерного адиабатического потока.
9. Как влияет трение при движении газа в трубе постоянного сечения на скорость потока в дозвуковой и сверхзвуковой зоне течения?
10. Что такое линия Фанно? Как её построить?
11. Что такое линия Релея? Опишите её построение.
12. Что такое тепловое сопло? Объясните принцип его работы.

Задачи

3.1. Самолет летит на высоте 12000 м ($t = -38^\circ \text{C}$, $p = 0,188 \text{ бар}$) со скоростью 640 км/час.

Пренебрегая эффектом трения:

- а) Определить критическую скорость воздуха относительно самолета;
- б) Определить максимально возможную скорость относительно самолета.

3.2. Сжимаемость жидкости обычно выражается в зависимости от объемного модуля сжимаемости, $\beta = \rho \frac{dp}{d\rho}$. Показать, что $a = \sqrt{\beta/\rho}$.

3.3. До какого давления должна быть сжата вода, чтобы она покидала сопло при атмосферном давлении со скоростью струи равной скорости звука?

Предполагаем, что постоянная объемного модуля сжимаемости равна 20700 бар.

3.4. Показать, что для идеального газа изменение давления при переходе через малый импульс давления определяется

$$\frac{dp}{p} = k \frac{dV}{a}$$

и что изменение в абсолютной температуре определяется

$$\frac{dT}{T} = k - 1 \frac{dV}{a}$$

3.5. Импульс сжатия изменяет скорость жидкости, через которую он проходит на 3 м/с. Подсчитать повышение давления (бар) при прохождении импульса для (а) воды и (б) воздуха при 0,101325 МПа и 20° С.

3.6. Поток воздуха течет в трубе диаметром 10 см с расходом 1 кг/с. Температура торможения 35° С. В одном из сечений трубы статическое давление равно 0,4 бар.

Определить число Маха, скорость и давление торможения в этом сечении.

3.7. Идеальный газ ($k = 1,4$, $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$) подводится к суживающемуся соплу при низкой скорости, давлении 7 бар и температуре 280° С. Истечение из сопла происходит в атмосферу (давление 1,01325 бар).

Считая течение адиабатическим, без трения и массовый расход потока равный 0,5 кг/с, определить:

- а) Давление в выходной плоскости, бар;
- б) Скорость в выходной плоскости, м/с;
- в) Площадь поперечного сечения выходной плоскости, м².

3.8. Показать, что для изоэнтропийного течения идеального газа отношение давления, температуры и плотности к соответствующим критическим значениям определяется как

$$\frac{p}{p_*} = \left[\frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} \right]^{\frac{k}{k-1}} ; \quad \frac{T}{T_*} = \frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} ;$$

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left[\frac{k+1}{2 \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2 \right)} \right]^{\frac{1}{k-1}} .$$

3.9. Трубка Пито для измерения статического давления показывает давление 0,364 бар и разницу между полным и статическим давлением 493 мм ртутного столба.

Барометр показывает 755 мм ртутного столба, температура торможения воздушного потока $26,6^\circ \text{C}$. Определить скорость воздуха, предполагая (а) воздух несжимаемым, (б) воздух сжимаемым.

3.10. Воздушный поток, протекающий в трубе при давлении 1,4 бар, имеет число $M = 0,6$ и массовый расход 0,25 кг/с.

Площадь поперечного сечения трубы равна $6,45 \text{ см}^2$.

а) Определить температуру заторможенного потока в $^\circ \text{C}$;

б) Какое максимальное процентное уменьшение площади возможно без уменьшения массового расхода?;

в) Для максимально уменьшенной площади части (б) определить скорость и давление в минимальном сечении, в предположении отсутствия трения и подвода или отвода тепла.

3.11. В заданной точке трубки тока воздух течет со скоростью 150 м/с и имеет давление и температуру 0,6895 бар и 5°C соответственно.

а) Определить следующие свойства в точке вниз по потоку трубки тока, где площадь поперечного сечения на 15% меньше чем в верхнем сечении: заторможенные температуру и давление, давление и температуру потока, скорость, число Маха и величину λ .

б) Определить максимально возможное уменьшение в площади поперечного сечения трубки тока.

Для сечения с минимальной площадью определить параметры, перечисленные в (а).

3.12. Когда тело помещен в поток, который на бесконечно большом расстоянии вверх по потоку однороден с параметрами V_∞ , p_∞ , M_∞ и т.д., местное давление на поверхности тела обычно представляют в зависимости от безразмерного коэффициента C_p :

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}.$$

а) Показать, что величина коэффициента давления, соответствующего появлению критической скорости, определяется выражением

$$C_p^* = \frac{\left[\frac{2 + k - 1}{k + 1} M_\infty^2 \right]^{\frac{k}{k-1}} - 1}{\frac{k}{2} M_\infty^2};$$

б) Построить зависимость $\log -C_p^*$ от $\log M_\infty$ для $k = 1,4$ и величин M_∞ между 0,1 и 1,0;

в) Предположим, что самолет летит со скоростью 800 км/час. Какой максимальный коэффициент давления можно получить на крыльях без появления где-либо сверхзвуковой скорости?

3.13. Число Маха на выходе из сопла реактивного двигателя составляет 1,8. Найти величину приведенного расхода газа, если коэффициент адиабаты равен 1,33.

3.14. Определить скорость истечения газа из сопла, если число λ на выходе составляет 1,7, а температура торможения $t_0 = 150^\circ \text{C}$, $k = 1,33$.

3.15. При истечении воздуха из решетки профилей в атмосферу ($t = 15^\circ \text{C}$, $p = 1,01325 \text{ бар}$) число $\lambda = 1,6$. Определить T_* , p_* , ρ_* в горле лопаточных каналов, а также найти величину расхода воздуха, если число каналов равно 5, высота лопаток 25 мм, размер геометрического горла 9 мм.

3.16. На высоте $H = 1100 \text{ м}$ самолет достиг скорости 300 м/с. С какой скоростью происходит полет – дозвуковой или сверхзвуковой?

Примечание. На этой высоте $t = 7,6^\circ \text{C}$.

3.17. Определить скорость истечения воздуха из бака если давление в баке составляет 1100 мм ртутного столба, температура $t = 100^\circ \text{C}$, а противодавление равно атмосферному.

3.18. Определить скорость распространения звука в струе воздуха, движущейся со скоростью 260 м/с, если истечение происходит из бака с температурой 50°C .

3.19. Определить скорость истечения газов из реактивного сопла ракеты ($k = 1,35$) движущейся в космосе, если температура торможения газов $t_0 = 1100^\circ \text{C}$. Какая скорость установится в горле сопла?

3.20. Рассмотреть сопло с к.п.д. η между входом и любым произвольным сечением вниз по потоку.

а) Вывести выражение

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{1}{\eta} \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right]^{\frac{k}{k-1}};$$

б) Получить соответствующие выражения для

$$\frac{G}{A} \frac{\sqrt{T_0}}{p_0};$$

в) Показать, что $M = 1$ не имеет место в минимальном сечении и определить число Маха в горле.

3.21. Рассмотреть сверхзвуковое сопло, выполненное с отношением выхода к горлу 2,0 ($A/A_* = 2$). Сопло питается воздухом при низкой скорости входа при $p_0 = 10 \text{ бар}$ и $t_0 = 100^\circ \text{C}$. Общий к.п.д. сопла от входа к выходу равен 90%, но течение изэнтропийное до горла.

Посчитать давление, скорость и число Маха на выходе и сравнить с соответствующими величинами для изэнтропийного течения.

3.22. Бак, имеющий объем 30 м^3 , наполнен воздухом с $p_0 = 10 \text{ бар}$, $t_0 = 100^\circ \text{C}$. Внезапно воздух начинает вытекать в атмосферу ($p = 1,01325 \text{ бар}$) через суживающееся сопло при отсутствии трения с выходной площадью 5 см^2 . Допускаем, что течение квази-стационарное, то есть что уравнения стационарного

течения могут быть применимы к соплу в любой момент времени. Более того, считаем, что бак идеально изолирован от окружающей среды.

Построить график изменения давления в баке от времени истечения.

3.23. Воздух течёт из бака через короткое суживающее сопло, соединённое с теплоизолированной трубой диаметром D . На входе в трубу

$M_1=0,5$. Коэффициент трения $f = \frac{\tau_w}{\rho V^2 / 2} = 0.015$ (V – средняя по рас-

ходу скорость жидкости).

Найти относительную критическую длину трубы l_* / D , т. е. максимально возможную при заданных условиях, в выходном сечении которой возникает критическая скорость.

3.24. По условию задачи 3.23 построить зависимость изменения безразмерной скорости $\lambda = V/a_*$ и безразмерной температуры $\tau = T/T_0$ вдоль трубы.

3.25. По условию задачи 3.23 найти критическое давление p_* , т.е. давление в выходном сечении трубы критической длины. Давление в баке $p_0 = 1 \text{ МПа}$.

3.26. По условиям задачи 3.23 и 3.25 построить распределение безразмерного статического давления p / p_0 вдоль трубы (p_0 – давление изоэнтропийного торможения во входном сечении трубы).

3.27. По условиям задач **3.23** и **3.25** построить распределение относительного давления изоэнтропийного торможения вдоль трубы p'_0 / p_0 (p'_0 – давление изоэнтропийного торможения в произвольном сечении трубы, p_0 – давление изоэнтропийного торможения во входном сечении трубы).

3.28. Воздух течёт по трубе с постоянной площадью поперечного сечения со скоростью $V=100 \text{ м/с}$. Температура воздуха $T=280 \text{ К}$.

Какое максимальное количество теплоты Q_{\max} можно подвести к единице массы текущего воздуха? Теплоёмкость воздуха в рассматриваемом диапазоне температур $c_p = 1020 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К} = \text{Const}$. Трением пренебречь.

ГЛАВА 4. ДВУХ И ТРЁХМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

4.1 Безвихревое движение жидкости. Потенциал скоростей и функция тока

Изучим вначале один частный, но весьма важный случай движения жидкости – движение, происходящее без вращения частиц.

Вращение в плоскости. Чтобы определить аналитическое выражение для вращения жидкости в точке двухмерного потока рассмотрим бесконечно малые и взаимно перпендикулярные линии жидкости OA и OB на рис. 4.1.

Движение каждой из этих линий может быть разложено на поступательное и вращательное. Для линии OA вращение может быть, если y -компонента скорости в точке A будет отличаться от y -компоненты скорости в точке O .

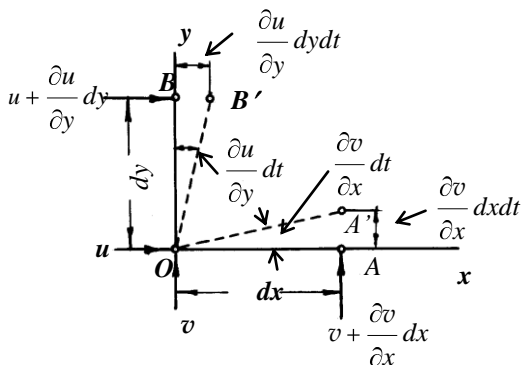


Рис. 4.1 – К определению вращения жидкости в точке

Так как для нас имеет значение разность в скоростях, представим себе, что мы движемся вместе с точкой O . Скорость точки A по отношению к O будет равна $\partial v / \partial x \, dx$

$$AA' = \frac{\partial v}{\partial x} dx dt .$$

Тогда угол AOA' , взятый положительным при отсчёте против часовой стрелки, будет равен

$$\angle AOA' = \frac{\partial v}{\partial x} dt ,$$

а скорость изменения этого угла равна $\partial v / \partial x$. Аналогично, угловая скорость линии OB равна $-\partial u / \partial y$.

Определяя компоненты угловой скорости вращения частицы (они называются иногда компонентами вихря) как средние арифметические из соответствующих угловых скоростей рёбер, получаем для этих компонент следующие формулы

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (4.1)$$

В векторной форме вектор вращения $\vec{\omega}$ может быть представлен

$$2\vec{\omega} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Или в более компактной форме

$$2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (4.2)$$

Расписав это выражение, мы получаем

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) +$$

$$+ \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Для хорошо обтекаемых тел вращение частиц фактически отсутствует, за исключением трёх областей

- (i) пограничного слоя;
- (ii) разрыва скоростей (т.е. скачки уплотнения);
- (iii) спутная струя за телом.

То есть для удобообтекаемых тел можно предположить, что вращение частиц в потоке отсутствует практически на всём протяжении тела (разумеется вне перечисленных областей).

Тогда в случае отсутствия вращения $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ и из (4.1) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Рассмотрим выражение

$$u dx + v dy + w dz, \quad (4.3)$$

которое будет полным дифференциалом в случае равенства друг другу крест-накрест взятых частных производных.

Это условие полностью совпадает с ранее написанными равенствами. Таким образом, можно сказать, что *если движение жидкости происходит без вращения частиц, то выражение (4.3) является полным дифференциалом некоторой функции координат, обозначенной нами через ϕ x, y, z .*

$$d\varphi = udx + vdy + wdz.$$

С другой стороны можно записать

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz.$$

Так как в обоих выражениях dx, dy, dz суть произвольные приращения координат, то из равенства выражений для $d\varphi$ вытекает равенство коэффициентов соответственно при dx, dy, dz :

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (4.4)$$

Или в векторной форме

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi, \\ 2\vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0. \end{aligned}$$

Гельмгольц предложил назвать функцию $\varphi(x, y, z)$, которая здесь играет такую же роль, как потенциал силы в общей механике, *потенциалом скоростей*.

Всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скоростей, и наоборот, если существует потенциал скоростей, то движение происходит без вращения частиц; поэтому такое движение называется *потенциальным*.

Функцию φ можно представить геометрически в виде семейства поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Такие поверхности, во всех точках которых потенциал сохраняет постоянное для каждой поверхности значение, называются *поверхностями равного потенциала*.

Линии тока ортогональны к поверхностям равного потенциала.

Для *несжимаемой* жидкости уравнение неразрывности имеет вид (2.6)

$$\operatorname{div} \vec{V} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Подставляя в это выражение вместо компонент скорости их выражения через потенциальную функцию φ (по формулам (4.4)), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.5)$$

Это последнее уравнение известно под названием *уравнение Лапласа*; функции, которые ему удовлетворяют, называются гармоническими. Уравнение Лапласа играет важную роль в таких областях как теплопередача в твёрдых телах, течение электричества через проводник.

Многие решения, которые были найдены для этих хорошо исследованных областей, могут быть применены при решении в поле течения несжимаемой жидкости.

Для двухмерного течения несжимаемой жидкости применение математического аппарата особенно удобно, так как можно показать, что в этом случае уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

удовлетворяется для обеих мнимой и действительной частей аналитической функции комплексного переменного. Так формальные математические методы в теории функций комплексного переменного могут быть применены к плоскому несжимаемому потоку. Уравнение (4.5) является *линейным* и, следовательно, обладает тем

свойством, что сумма любого числа частных решений его также является решением.

Пусть φ_1 и φ_2 – частные решения уравнения Лапласа. Это значит, что

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0.$$

Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ также есть решение уравнения Лапласа, так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сумма потенциалов скоростей потоков несжимаемой жидкости всегда представляет собой также потенциал скоростей некоторого потока несжимаемой жидкости.

То есть у потока, который соответствует суммарному потенциалу, скорость в каждой точке равна геометрической сумме скоростей складываемых потоков

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

Функция тока. Также как отсутствие вращения является необходимым и достаточным условием для существования потенциала скоростей, так уравнение неразрывности для *стационарного двумерного* потока является необходимым и достаточным условием для существования другой функции, *функции тока*.

Под эту категорию попадает плоское и осесимметричное течение жидкости.

В случае плоского стационарного течения уравнение неразрывности (2.5) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0.$$

Отсюда мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u = -\frac{\partial}{\partial y} \rho v. \quad (4.6)$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy.$$

Полный дифференциал функции ψ предполагает равенство крест накрест взятых производных

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.6) и (4.7) можем записать, что полный дифференциал функции ψ определяется условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v.$$

Отсюда мы получаем

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Теперь, обращаясь к рис. 4.2, массовый расход потока dG сквозь произвольную поверхность AB (с высотой равной единице

перпендикулярной плоскости бумаги), ограниченной двумя соседними поверхностями постоянного ψ , равен

$$dG = \rho u dy - \rho v dx.$$

Мы поставили здесь знак минуса, так как считаем расход жидкости сквозь элементарную площадку положительным, если скорость, нормальная к площадке, направлена слева направо, когда смотреть вдоль положительного направления основания площадки.

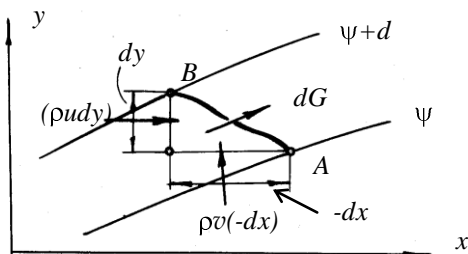


Рис. 4.2 – К определению физического значения функции тока

С другой стороны, согласно определения функции тока ψ

$$d\psi = \rho u dy - \rho v dx,$$

то есть

$$d\psi = dG.$$

Следовательно, мы видим, что изменения в величине ψ между двумя линиями постоянного ψ определяется массовым расходом жидкости между этими двумя линиями.

Так как для стационарного потока массовый расход потока между линиями тока постоянен, то из этого следует, что линии постоянного ψ являются линиями тока, отсюда следует название “*функция тока*”.

Дифференциальное уравнение линий тока запишется с помощью функции ψ в виде

$$d\psi = 0,$$

а общий его интеграл – в виде

$$\psi(x, y) = \text{const}.$$

Последнее равенство представляет собой в конечной форме уравнение семейства линий тока.

Для несжимаемой жидкости

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Если в потоке отсутствует вращение частиц, то

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Подставляя сюда вместо u и v их выражения через ψ , получаем следующее уравнение для определения функции тока плоского потока:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.9)$$

То есть функция тока в плоском потенциальном потоке должна быть решением уравнения Лапласа, то есть должна быть гармонической функцией, так же как и потенциал скоростей ϕ , который в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, как и в случае потенциалов скоростей, *сумма функций тока несжимаемой жидкости потенциального потока представляет собой также функцию тока.*

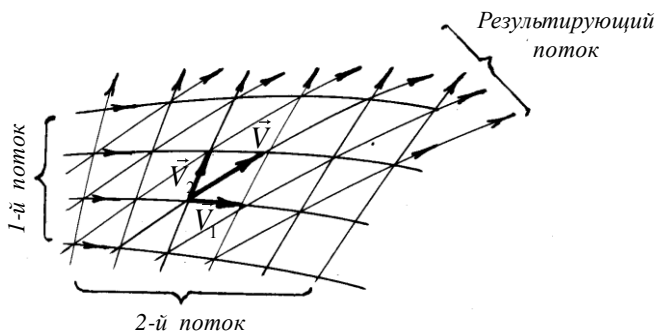


Рис. 4.3 – Графическое определение линий тока результирующего потока

То есть в рассматриваемом случае мы имеем

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 ,$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 ,$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 .$$

Операцию сложения ϕ и ψ называют наложением токов.

Последнее равенство позволяет дать очень простой способ *графического определения линий тока результирующего потока*, если известны линии тока налагаемых потоков.

Выясним каким условиям должен удовлетворять чертеж линий тока налагаемых потоков для того, чтобы стороны клеток изображали в определенном масштабе (одном и том же для всего чертежа) соответствующие векторы скоростей.

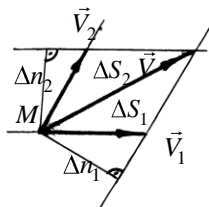


Рис. 4.4 – К условию графического наложения потоков

ΔS_1 и ΔS_2 – длины сторон какой-либо клетки. Равенство масштабов для векторов скорости обоих потоков запишется в виде пропорции:

$$\frac{V_1}{\Delta S_1} = \frac{V_2}{\Delta S_2}.$$

Из условия подобия треугольников

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta n_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta n_2},$$

тогда предыдущее условие запишется в виде

$$\frac{V_1}{\Delta n_1} = \frac{V_2}{\Delta n_2},$$

или

$$V_1 \cdot \Delta n_2 = V_2 \cdot \Delta n_1.$$

Произведение $V \cdot \Delta n$ можно рассматривать как объем жидкости, протекающий в единицу времени между двумя соседними линиями тока. Умножив объемы на плотность, одинаковую для обоих объемов (жидкость несжимаема) получаем

$$\Delta G_1 = \Delta G_2.$$

При соблюдении этого равенства будут одинаковы масштабы, в которых изображены векторы скоростей обоих потоков в *данной точке*.

Задача кинематики потенциального потока несжимаемой жидкости с математической точки зрения сводится, таким образом, к решению уравнения Лапласа или уравнений (4.5) или (4.9) при определенных граничных условиях. Однако эта задача представляет значительные математические трудности. Основная трудность заключается здесь не в составлении общего интеграла, а в определении такого частного решения, которое удовлетворяло бы граничным условиям данной задачи.

В общем случае, то есть для тела любой формы, помещенного в поток, эта задача не решена точно и до настоящего времени. Поэтому особый интерес и значение представляют те немногочисленные простейшие случаи потенциального потока, для которых можно точно определить потенциал скоростей и функцию тока, исходя из известного распределения скоростей, то есть не решая уравнение Лапласа. Сюда относятся поступательный поток, источник и сток, вихрь на плоскости. Зная потенциалы скоростей этих простейших потоков, можно затем, комбинируя их между собой так, как это подробно приводится в [9], получать более сложные потоки. Оказывается, что при надлежащей комбинации перечисленных простейших потоков можно, вообще говоря, получить потенциальный поток, обтекающий любое данное тело.

4.2 Примеры простейших потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости и их наложение. Теорема Н.Е.Жуковского

Ниже мы рассмотрим наиболее характерные примеры плоских, установившихся потенциальных потоков несжимаемой жидкости, наложением которых могут быть получены сложные практически важные потоки.

1. Прямолинейный равномерный поток. Пусть плоскопараллельный поток задан потенциалом

$$\varphi = ax + by, \quad (4.10)$$

где a и b – некоторые действительные числа.

Тогда

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Найдем линии тока. Из уравнения линий тока

$$d\psi = udy - vdx$$

имеем

$$d\psi = ady - bdx ,$$

откуда

$$\psi = ay - bx .$$

Линии тока представляют собой семейство параллельных прямых $\psi = ay - bx = const$, наклоненных к оси x под углом α , тангенс которого $tg\alpha = v/u = b/a$ (рис. 4.5).

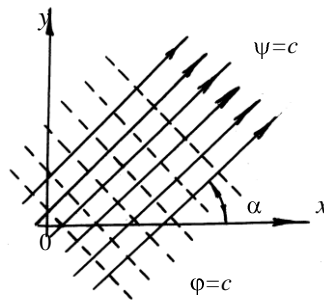


Рис. 4.5 – Линии тока и линии равного потенциала для прямолинейного равномерного потока

Если поток направлен параллельно оси x , функции ϕ и ψ имеют вид $\phi = ax$, $\psi = ay$; при направлении потока параллельно оси y – $\phi = by$, $\psi = -bx$.

2. Течение внутри прямого угла. Предположим, что плоско-параллельный поток задан следующим потенциалом скорости

$$\phi = a x^2 - y^2 , \quad (4.11)$$

где a – постоянная и больше нуля.

Вспомним, что для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Из первого соотношения (4.12) находим $\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + C x$, так как интегрируем только по y . Подставляя сюда $\partial \varphi / \partial x$ из (4.11), находим:

$$\psi = \int 2axy dy + C x = 2axy + C x. \quad (4.13)$$

Дифференцируя (4.13) по x имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay + \frac{dC}{dx}.$$

Используя второе выражение (4.12) для $\partial \varphi / \partial y$, найденного из (4.11), получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2ay - \frac{dC}{dx}.$$

Или $dC/dx = 0$, $C x = \text{const}$.

Подставляя $C x$ в (4.13) получаем $\psi = 2axy + \text{const}$. Для нахождения линий тока приравняем функцию тока ψ постоянной:

$$\psi = 2axy = \text{const}, \text{ откуда } xy = C.$$

То есть линии тока представляют собой семейство гипербол с асимптотами, являющимися осями координат (рис. 4.6). При $C > 0$ (либо $x > 0$, $y > 0$, или $x < 0$, $y < 0$) ветви гипербол располагаются в первой и третьей четвертях. При $C < 0$ (либо $x < 0$, $y > 0$, или $x > 0$, $y < 0$) ветви гипербол расположены во второй и четвертой четвертях. Если $C = 0$, то линиями тока являются оси координат $x = 0$, $y = 0$, то есть оси координат являются “нулевыми” линиями тока.

Нетрудно убедиться, что в начале координат $u = v = 0$ и эта точка называется *критической точкой*.

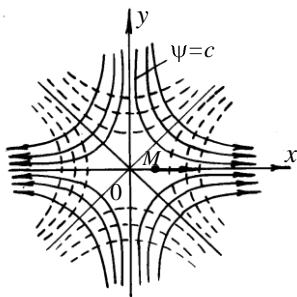


Рис. 4.6 – Потенциальное течение внутри прямого угла

Найдем направление течения. Для точки M , у которой $x > 0$, $y = 0$ имеем $u_M = 2ax > 0$, $v_M = 0$, то есть поток течет в направлении, показанном на рис. 4.6 сплошными линиями. Уравнение семейства эквипотенциальных линий $\varphi = a x^2 - y^2 = \text{const}$ представляет собой семейство гипербол с асимптотами, являю-

щимися биссектрисами координатных углов, ортогональное к семейству $xy = C$. Если “нулевые линии” (положительные части осей x и y) принять за твердые стенки, то исследуемое течение будет представлять течение внутри прямого угла.

3. Источник и сток. Пусть потенциал скорости задан в следующем виде:

$$\varphi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

или в полярных координатах

$$\varphi = \ln r. \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + C x,$$

$$\psi = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy + C x = \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + C x.$$

Интегрируя имеем

$$\psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + C \quad x . \quad (4.15)$$

Для определения C x продифференцируем (4.15) по x

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + C' \quad x = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C' \quad x .$$

С другой стороны
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} .$$

Отсюда: $C' \quad x = 0$ или $C \quad x = const$.

То есть функция тока для данного течения представляется уравнением (с точностью до произвольной постоянной)

$$\psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad \psi = \Theta . \quad (4.16)$$

Совокупность линий тока $\psi = \Theta = const$ представляет собой семейство лучей, исходящих из начала координат (рис. 4.7).

Очевидно, что $V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} > 0$, то есть направление скорости

совпадает с положительным направлением полярного радиуса. Такое течение называется течением от *источника*. Приравняв потенциал скорости постоянному получаем семейство эквипотенциальных линий $\varphi = \ln r = const$, то есть $r = const$.

Это семейство концентрических окружностей.

Пусть Q – секундный расход вытекающей жидкости, мощность источника.

Из уравнения неразрывности $Q = 2\pi r V_r$.

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr} \quad (\varphi \text{ зависит только от } r), \text{ тогда}$$

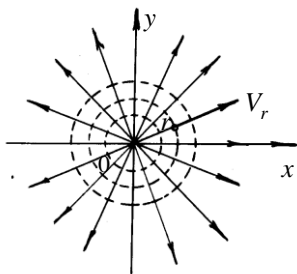


Рис. 4.7 – Линии тока и эквипотенциальные линии источника

$$Q = \frac{d\varphi}{dr} 2\pi r, \quad d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r}, \text{ а}$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r.$$

$$\text{Аналогично, } \psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta.$$

То есть мы показали, что выражения (4.14), (4.16) представляют собой потенциал скорости и функцию тока для источника, мощность которого $Q = 2\pi$.

В случае, когда жидкость течет в обратном направлении, течение называется течением от *стока*. В этом случае

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \Theta. \quad (4.17)$$

4. Диполь. Это комбинация источника мощностью $+Q$ и стока мощностью $-Q$, помещенных на бесконечно малом расстоянии друг от друга.

Потенциал диполя (рис. 4.8)

$$\varphi = \varphi_{ист} + \varphi_{см} = \frac{Q}{2\pi} \ln r_1 - \ln r_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

$$r_1 = \sqrt{x + \varepsilon^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{x - \varepsilon^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{x + \varepsilon^2 + y^2}{x - \varepsilon^2 + y^2}} = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{x + \varepsilon^2 + y^2 + x - \varepsilon^2 - x - \varepsilon^2}{x - \varepsilon^2 + y^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{4x\varepsilon}{x - \varepsilon^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

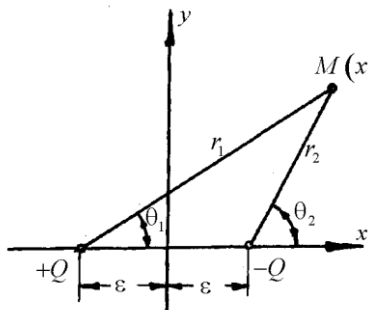


Рис. 4.8 – Диполь

Разлагая в ряд по известной формуле

$$\ln 1+z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

где $z = \frac{4x\varepsilon}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2}$, сближая ис-

точник и сток ($\varepsilon \rightarrow 0$) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \frac{4x\varepsilon}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2}. \quad (4.18)$$

Функция тока будет иметь вид

$$\psi = \psi_{ист} + \psi_{ст} \frac{Q}{2\pi} \Theta_1 - \Theta_2.$$

Так как $\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{y}{x+\varepsilon}$, $\operatorname{tg} \Theta_2 = \frac{y}{x-\varepsilon}$, то

$$\operatorname{tg} \Theta_1 - \Theta_2 = \frac{\operatorname{tg} \Theta_1 - \operatorname{tg} \Theta_2}{1 + \operatorname{tg} \Theta_1 \operatorname{tg} \Theta_2} = \frac{y \frac{x-\varepsilon}{x+\varepsilon} - y \frac{x+\varepsilon}{x-\varepsilon}}{x^2 - \varepsilon^2 + y^2} = \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2},$$

то есть

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Используя известное разложение в ряд

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots,$$

где $z = \frac{-2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}$ и пренебрегая величинами второго порядка малости при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{2y\varepsilon}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}. \quad (4.19)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ будем считать, что $2Q\varepsilon \rightarrow M$ – некоторой конечной величине (момент диполя). Величина M обычно изображается в виде вектора, направление которого указывает на направление от стока к источнику.

Ось x – ось диполя.

В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим следующие выражения для функций ϕ и ψ :

$$\phi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.20)$$

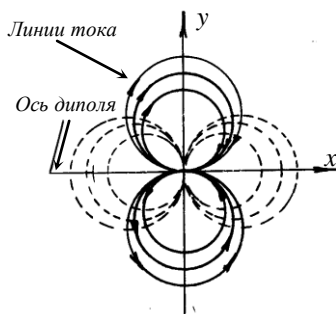


Рис. 4.9 – Линии тока и эквипотенциальные линии диполя

Для определения линий тока приравняем функцию тока ψ постоянно-

му, то есть $\frac{y}{x^2 + y^2} = C$, откуда

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$

Это семейство окружностей с центрами на оси y , касающихся оси x в начале координат (рис. 4.9).

Жидкость по указанным окружностям вытекает из начала координат и вновь в него втекает. Очевидно, что расход через произвольный замкнутый контур, окружающий диполь, равен нулю.

Совокупность эквипотенциальных линий тока

$y^2 + \left(x - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}$ представляет собой семейство окружностей, ортогональных линиям тока, с центрами на оси x , касающихся оси y в начале координат (рис. 4.9).

5. Вихрь. Для плоского источника в соответствии с (4.17)

$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$, $\psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta$. Рассмотрим теперь такой плоский поток, в котором потенциал скорости φ и функция тока ψ поменяются местами:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \Theta, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \ln r,$$

где $Q > 0$ – некоторая постоянная, физический смысл которой для нового потока следует определить. В данном случае совокупность линий тока – семейство концентрических окружностей с центрами в начале координат.

Найдём направление движения:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{Q}{2\pi r} > 0$$

То есть скорость V в точке M направлена по касательной к окружности радиуса r в сторону возрастания угла Θ , то есть против часовой стрелки (рис. 4.10).

Такое движение называется плоским вихревым движением.

Для выяснения физического смысла постоянной Q вычислим значение циркуляции в рассматриваемом потоке:

$$\Gamma = \oint V_s dS = \oint \frac{Q}{2\pi r} r d\Theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Theta = Q.$$

То есть постоянная Q равна циркуляции Γ .

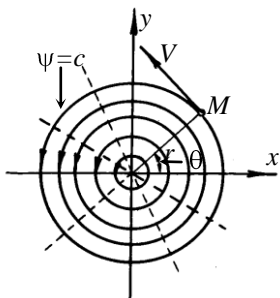


Рис. 4.10 – Вихревое течение

Таким образом, выражения для потенциала скорости и функции тока плоского вихря принимает вид

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (4.21)$$

Примем за твёрдую границу одну из линий тока $r = r_0$, что не нарушит характера потока. Будем рассматривать течение

вне этой окружности. Получим, так называемое *чисто циркуляционное обтекание* бесконечно длинного (в направлении оси z) круглого цилиндра радиуса r_0 . Скорость V в любой точке вне цилиндра

выражается в следующем виде $V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$. Максимального значения

скорость будет достигать на поверхности круглого цилиндра

$$V_{max} = V_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

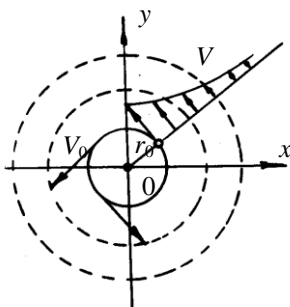


Рис. 4.11 – Чисто циркуляционное обтекание круглого цилиндра

С удалением от цилиндра скорость будет убывать по гиперболическому закону

$$Vr = \frac{\Gamma}{2\pi} = const, \quad \text{что графически}$$

изображено на рис. 4.11.

Как указывалось выше, комбинацией простейших потоков можно, вообще говоря, получить потенциальный поток,

обтекающий любое данное тело. Приведём примеры.

6. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра. Получаем в результате наложения друг на друга:

1. равномерного прямолинейного потока, движущегося в направлении оси x со скоростью, равной единице: $\varphi = x$, $\psi = y$;

2. потока, получаемого от диполя с моментом $M = 2\pi$:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Для функций φ и ψ сложного потока имеем:

$$\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.22)$$

В случае скорости отличной от 1 и $M \neq 2\pi$:

$$\varphi = V_{\infty}x + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = V_{\infty}y - \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.23)$$

Если воспользоваться полярными координатами ($x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$), то

$$\begin{aligned} \varphi &= V_{\infty} \cdot r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{M}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{r^2} \right), \\ \psi &= V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{M}{2\pi V_{\infty}} \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Обозначим постоянный комплекс $\frac{M}{2\pi V_{\infty}}$ через r_0 . Тогда

$$\varphi = V_{\infty} \cdot r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad \psi = V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (4.24)$$

Для нахождения линии тока приравняем функцию тока постоянной

$$V_{\infty} \cdot r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = C.$$

Для нулевой линии тока ($C = 0$) получаем два уравнения: $\sin \Theta = 0$ (то есть $y = 0$) и $1 - \frac{r_0^2}{r^2} = 0$ (то есть $x^2 + y^2 = r_0^2$). Отсюда следует, что нулевая линия тока представляет собой два отрезка оси x (рис. 4.12), между которыми располагается окружность радиусом $r = r_0$. Принимая нулевую линию тока за твёрдую обтекаемую поверхность и вспоминая, что $r_0^2 = \frac{M}{2\pi V_{\infty}}$, получаем решение задачи о движении жидкости вокруг произвольного цилиндра, радиус которого r_0 даёт возможность найти необходимый для этого случая момент диполя M .

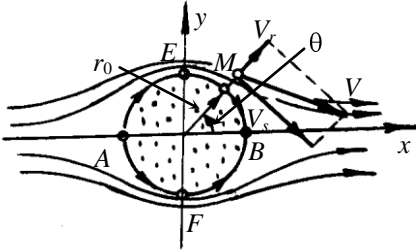


Рис. 4.12 – Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра

Поле скоростей по обе стороны от нулевой линии тока определяется обычным образом по известным функциям (4.24):

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_{\infty} \cos \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right),$$

$$V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -V_{\infty} \sin \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right).$$

На поверхности цилиндра $V_r|_{r=r_0} = 0$,

$$V_s|_{r=r_0} = -2V_{\infty} \sin \Theta. \quad (4.25)$$

Знак минус в (4.25) означает, что при направлении скорости V_{∞} , совпадающем с положительным направлением оси x , скорость

на цилиндре V_s направлена в сторону убывания углов Θ при $\sin \Theta > 0$, то есть в первой и второй четвертях квадранта, и в сторону возрастания углов Θ при $\sin \Theta < 0$, то есть в третьей и четвертой четвертях.

Скорость в точках A и B ($\Theta_2 = \pi$, $\Theta_1 = 0$), которые называют критическими точками, равна нулю. Максимальная скорость достигается в точках E и F при угле $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ($V_{s \max} = 2V_\infty$).

Распределение давления на поверхности цилиндра находим из уравнения Бернулли, записанного для нулевой линии тока:

$$\frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{V_s^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Отсюда

$$p - p_\infty = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{V_s^2}{V_\infty^2} \right)$$

или переходя к коэффициенту давления \bar{P} , используя (4.25), получаем

$$\bar{P} = \frac{p - p_\infty}{\rho V_\infty^2 / 2} = 1 - \frac{V_s^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \Theta. \quad (4.26)$$

Определим силы, действующие на единицу длины цилиндра:

$$\begin{aligned} P_y &= - \int_0^{2\pi} p_y \cdot 1 \cdot dS = - \int_0^{2\pi} p r_0 \sin \Theta d\Theta; \\ P_x &= - \int_0^{2\pi} p_x \cdot 1 \cdot dS = - \int_0^{2\pi} p r_0 \cos \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Поскольку $p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \Theta)$, то

$$P_y = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \Theta) \right] \sin \Theta d\Theta = 0;$$

$$P_x = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \Theta) \right] \cos \Theta d\Theta = 0.$$

То есть сила сопротивления цилиндра, обтекаемого потоком идеальной жидкости, равна нулю.

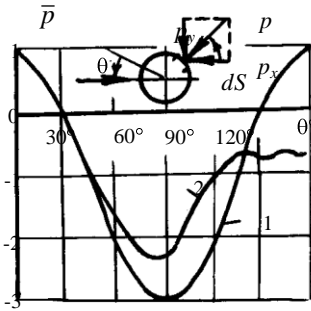


Рис. 4.13 – Распределение коэффициента давления по цилиндру:

1 – идеальная жидкость; 2 – вязкая жидкость.

Факт отсутствия сопротивления при обтекании любых тел потоком идеальной жидкости в гидродинамике называют парадоксом Эйлера-Даламбера. В реальной жидкости распределение давления соответствует кривой 2 на рис. 4.13. В диффузорной области поток отрывается от стенок, $P_x \neq 0$.

7. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра. В этом случае складывается плоскопараллельный поток, диполь и циркуляционное течение. В результате суммарный потенциал и функция тока будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= V_\infty r \cdot \cos \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \Theta; \\ \psi &= V_\infty r \cdot \sin \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
V_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_\infty \cos \Theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right), \quad V_r|_{r=r_0} = 0; \\
V_s &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = -V_\infty \sin \Theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \\
V_s|_{r=r_0} &= -2V_\infty \sin \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Смещённые критические точки находим, приравняв (4.29) к нулю:

$$\begin{aligned}
-2V_\infty \sin \Theta_{кр} + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} &= 0. \\
\sin \Theta_{кр} &= \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty r_0}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

В следствие нарушения симметрии относительно оси x на цилиндр будет действовать вертикальная сила, которую определяем из уравнения Бернулли (используя (4.29))

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p + \rho \frac{\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0} - 2V_\infty \sin \Theta \right)^2}{2}.$$

Отсюда

$$p = p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} - 2 \sin \Theta \right)^2.$$

Используя выражение для P_y (4.27), получаем

$$P_y = -r_0 \int_0^{2\pi} \left[p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} - \frac{\rho V_\infty^2}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} - 2 \sin \Theta \right)^2 \right] \sin \Theta d\Theta.$$

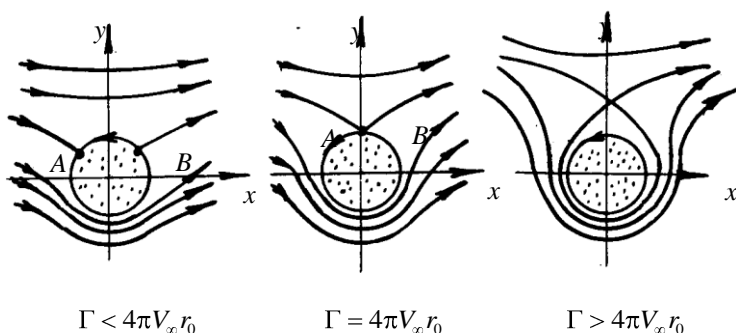


Рис. 4.14 – Линии тока при обтекании цилиндра с циркуляцией

Преобразовывая и почленно интегрируя ряд слагаемых обращается в нуль и остаётся только один член

$$P_y = -\frac{\rho \Gamma V_{\infty}}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Theta d\Theta = -\rho V_{\infty} \Gamma. \quad (4.31)$$

Формула (4.31) определяет подъёмную силу, действующую на единицу длины цилиндра, обтекаемого плоскопараллельным потоком при наличии циркуляционного течения, и является частным случаем формулы Н.Е. Жуковского, вывод которой будет приведен ниже.

Факт появления подъёмной силы на вращающемся цилиндре был использован на практике в 1923 году при создании ветрового двигателя.

Содержащийся в формуле (4.31) результат носит название *теоремы Н.Е. Жуковского* о подъёмной силе, являющейся основной теоремой аэродинамики:

при циркуляционном обтекании цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью на цилиндр действует сила, нормальная к скорости на бесконечности V_{∞} и равная произведению этой скорости

на циркуляцию Γ и плотность ρ потока. Для определения направления подъёмной силы надо вектор скорости повернуть на 90° в сторону обратную циркуляции.

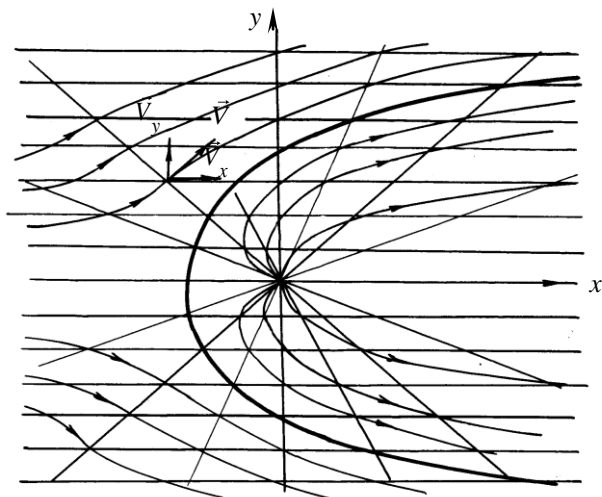


Рис. 4.15 – Пример наложения прямолинейно-поступательного потока на плоский источник $\psi \ x, y = V_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \Theta$

Теорема Н.Е. Жуковского может быть доказана применительно к безотрывному обтеканию произвольного контура несжимаемой жидкостью. Эта же теорема справедлива и для сжимаемого газа при дозвуковых скоростях течения, что впервые было доказано М.В. Келдышем и Ф.И. Франклем.

4.3 Применение теории функций комплексного переменного к изучению плоскопараллельного потока идеальной жидкости

Итак плоский потенциальный поток характеризуется двумя функциями: потенциалом скоростей $\phi \ x, y$ и функцией тока

$\psi(x, y)$. Каждая из этих функций удовлетворяет в случае несжимаемой жидкости уравнению Лапласа. Линии тока и линии равного потенциала образуют в случае плоского потока ортогональную сеть.

Ортогональность линий тока и линий равного потенциала. Для потока стационарного, невращающегося и двумерного функция тока и потенциал скоростей дают, используя уравнения (4.4) и (4.8),

$$u = \varphi_x = \frac{1}{\rho} \psi_y, \quad v = \varphi_y = -\frac{1}{\rho} \psi_x. \quad (4.32)$$

То, что линии постоянных ψ являются также линиями тока можно показать, заметив, что так как ψ является точечной функцией, то

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy.$$

Положив $d\psi = 0$ и используя (4.32), мы находим наклон линии постоянного ψ

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi} = -\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{v}{u}.$$

Но по определению наклон линии тока равен

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\text{линии тока}} = \frac{v}{u}$$

и следовательно ψ линии и линии тока одно и то же.

Аналогично рассуждая для линий равного потенциала, находим

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy.$$

Используя (4.32), мы получаем для наклона эквипотенциальной линии

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{u}{v}$$

так, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi}}, \quad (4.33)$$

откуда мы заключаем, что линии постоянного φ нормальны к линиям постоянного ψ . Другими словами, эквипотенциальные линии и линии тока составляют *ортогональную сетку* (рис. 4.16).

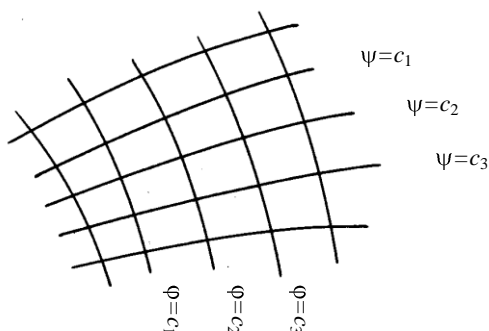


Рис. 4.16 – Линии тока и линии равного потенциала

Комплексный потенциал. Мы знаем, что для несжимаемой жидкости

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Сопоставляя эти равенства, мы находим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.34) представляет собой дифференциальные уравнения Коши-Римана, которым удовлетворяют вещественная и мнимая части всякой регулярной функции комплексного переменного $f(z)$ (где $z = x + iy$) и наоборот, если какие бы то ни было функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.34), то эти функции можно рассматривать соответственно как вещественную и мнимую части некоторой регулярной функции комплексного переменного. На этом основано применение комплексной переменной к теории плоского потенциального потока несжимаемой жидкости.

Функция

$$w = \varphi + i\psi = f(z)$$

называется *характеристической функцией плоского потока* или *комплексным потенциалом*.

Вышеуказанная связь аэродинамики плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости с прекрасно разработанной теорией функций комплексного переменного позволяет с успехом решать для плоскопараллельного потока задачи, представляющие значительные трудности в случае произвольного течения в пространстве. Особое значение этот метод приобрёл в проблемах теории крыла.

Комплексная скорость. Возьмём производную от комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ по комплексному переменному $z = x + iy$. Как известно из теории функций комплексного переменного, выражение для производной будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Ранее было установлено, что для компонентов скорости V

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Заменяя производные в выражении для dw/dz с помощью этих формул, находим

$$\frac{dw}{dz} = u - iv. \quad (4.35)$$

Это выражение называется *комплексной скоростью*.

Модуль комплексной скорости будет давать величину самой скорости V :

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} = V.$$

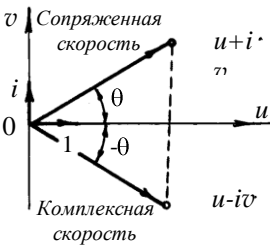


Рис. 4.17 – Комплексная и сопряжённая скорости

Вектор, определяющий величину комплексной скорости $u - iv$, получаем зеркально относительно действительной оси x вектора $u + iv$ (рис. 4.17)

Выражению (4.35) для комплексной скорости можно придать ещё другой вид.

Так, из рисунка следует, что $u = V \cos \Theta$, $v = V \sin \Theta$, то

$$\frac{dw}{dz} = V \cos \Theta - i \sin \Theta = V \cdot e^{-i\Theta}. \quad (4.36)$$

Примеры простейших течений.

Пример 1. Пусть комплексный потенциал представляет собой простейшую линейную функцию

$$w(z) = A \cdot z = a - ib \quad x + iy. \quad (4.37)$$

Здесь A – комплексная величина, равная $A = a - ib$, a и b – постоянные величины; $z = x + iy$.

Определим характер течения.

Подставляя значения w , A и z , получим

$$\varphi + i\psi = a - ib \quad x + iy = ax + by + i ay - bx .$$

Уравнения эквипотенциальных линий и линий тока $\varphi = ax + by = \text{const}$ и $\psi = ax - by = \text{const}$ определяют взаимно перпендикулярные линии, приведенные на рис. 4.5.

Комплексная скорость будет равна

$$\frac{dw}{dz} = A = a - ib .$$

Составляющие скорости и её направление находятся по сопряжённой скорости: $u = a$, $v = b$. Следовательно, жидкость будет течь по прямым, наклонённым к оси x под углом α ($\text{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{v}{u}$) со скоростью

$$V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{u^2 + v^2} .$$

При $b = 0$ имеем прямолинейный равномерный поток параллельно оси x . $a = V_{\infty}$.

Пример 2. Поток задан комплексным потенциалом

$$w = az^2 , \quad (4.38)$$

где a – действительная величина. В этом случае будем иметь

$$w = \varphi + i\psi = a \quad x + iy^2 = a \quad x^2 - y^2 + i2axy ,$$

$$\varphi = a \quad x^2 - y^2 , \quad \psi = 2axy .$$

Это течение внутри прямого угла. Линии $\varphi = a x^2 - y^2 = const$ и $\psi = 2axy = const$ будут представлять два семейства взаимно ортогональных гипербол (рис. 4.6).

Комплексная скорость в этом случае будет равна $\frac{dw}{dz} = 2az$, следовательно

$$u - iv = 2a x + iy, \text{ то есть } u = 2ax, v = -2ay.$$

Жидкость будет двигаться по гиперболическим линиям тока со скоростью

$$V = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{2ax^2 + -2ay^2} = 2a\sqrt{x^2 + y^2} = 2ar.$$

Начало координат является критической точкой ($V = 0$).

Пример 3. Поток задан комплексным потенциалом

$$w = a \ln z, \quad (4.39)$$

где a – действительное число. Подставим комплексную переменную z в полярной системе координат:

$$w = \varphi + i\psi = a \ln r e^{i\Theta} = a \ln r + ia\Theta,$$

откуда $\varphi = a \ln r$, $\psi = a\Theta$. Уравнения эквипотенциальных линий ($r = const$) и линий тока ($\Theta = const$), представляют собой окружности и прямые, проходящие через начало координат (рис. 4.7).

Для комплексной скорости будем иметь $\frac{dw}{dz} = \frac{a}{z}$. Как видим, в этом случае комплексный потенциал w и комплексная скорость, являющиеся аналитическими функциями переменного z , в начале координат перестают быть аналитическими, так как w и $\frac{dw}{dz}$ об-

ращаются при $z = 0$ в бесконечность. В этом случае начало координат является так называемой *особой точкой*: для функции w – изолированной логарифмической точкой, а для комплексной скорости $\frac{dw}{dz}$ – полюсом первого порядка. Если постоянная $a > 0$, имеем источник, $a < 0$ – сток. Если мощность (объёмный расход) источника (стока) равна Q , то $a = \frac{Q}{2\pi}$. То есть комплексный потенциал источника (стока) будет иметь вид

$$w = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (4.40)$$

Если источник (сток) находится не в начале координат, а в точке $z = a_1$, то

$$w = \pm \frac{Q}{2\pi} \ln z - a_1.$$

Наконец, если на плоскости расположено n источников (стоков), находящихся соответственно в точках $z = a_1, z = a_2, \dots, z = a_n$, то комплексный потенциал в этом случае примет вид

$$w = \sum_{k=1}^n \pm \frac{Q_k}{2\pi} \ln z - a_k. \quad (4.41)$$

Пример 4. Поток задан комплексным потенциалом

$$w = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (4.42)$$

В этом случае

$$w = \varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Получаем поток, разобранный выше (диполь) (рис. 4.9).

Комплексная скорость для диполя будет иметь вид

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{M/2\pi}{z^2}; \text{ начало координат будет являться } \textit{особой точкой};$$

для функции w – полюсом первого порядка, а для комплексной скорости – *полюсом второго порядка*.

Пример 5. Комплексный потенциал задан в виде $w = a \ln z$,

где a – чисто мнимое число, $a = -\frac{\Gamma}{2\pi}i$, то есть

$$w = -\frac{\Gamma}{2\pi}i \ln z. \quad (4.43)$$

Нетрудно убедиться, что этот потенциал представляет собой комплексный потенциал плоского вихря (рис. 4.10)

В самом деле

$$w = \varphi + i\psi = a \ln r e^{i\Theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi}i \ln r + i\Theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\Theta - i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

То есть

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\Theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Величина комплексной скорости $\frac{dw}{dz} = -\frac{\Gamma}{2\pi}i \frac{1}{z}$. То есть как и

в случае источника, начало координат будет являться для комплексного потенциала вихря *логарифмической особой точкой*, а для комплексной скорости – *полюсом первого порядка*.

Если вихрь находится не в начале координат, а в точке $z = a_1$, то выражение для w примет вид $w = -\frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z - a_1$. Если же на плоскости находится n вихрей, расположенных в точках $z = a_1, z = a_2, \dots, z = a_n$, то комплексный потенциал будет иметь вид

$$w = -\sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} i \ln z - a_k. \quad (4.44)$$

Пример 6. Накладывая плоскопараллельное течение на диполь, имеем

$$w = V_\infty z + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (4.45)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим выражения для φ и ψ в следующем виде

$$\varphi = V_\infty x + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = V_\infty y - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Обозначая $\frac{M}{2\pi V_\infty}$ через r_0^2 , получаем выражение для комплексного потенциала для бесциркуляционного обтекания круглого цилиндра плоскопараллельным потоком

$$w = V_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right). \quad (4.46)$$

В этом случае комплексная скорость равна

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right). \quad (4.47)$$

Отсюда при $z = \infty$ $\frac{dw}{dz} = V_\infty$, то есть действительно скорость на бесконечности будет заданной скоростью. Критические точки в этом случае будут находиться на действительной оси. Проверим это. Приравняв комплексную скорость нулю, получаем:

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) = 0,$$

откуда

$$z = \pm r_0.$$

То есть действительно критические точки находятся на действительной оси в точках $(r_0, 0)$, $(-r_0, 0)$ (рис. 4.12).

Пример 7. Для получения потока, обтекающего цилиндр радиуса r_0 с циркуляцией, необходимо на рассмотренный поток наложить поток от вихря, поместив последний в начале координат. В таком случае комплексный потенциал будет иметь вид:

$$w = V_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z. \quad (4.48)$$

Для нахождения критических точек приравняем комплексную скорость нулю:

$$\frac{dw}{dz} = V_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \frac{1}{z} = 0.$$

На поверхности цилиндра переменное $z = r_0 e^{i\Theta}$, подставляя которое в вышеописанное выражение, получаем

$$V_\infty \left(1 - e^{-2i\Theta} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} i e^{-i\Theta}. \text{ Умножая на } e^{i\Theta} \text{ и деля на } V_\infty, \text{ имеем}$$

$$e^{i\Theta} - e^{-i\Theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_\infty} i, \quad \frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty}.$$

Учитывая, что $\frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} = \sin \Theta$, находим $\sin \Theta_{кр} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_\infty}$, то есть выражение (4.30).

4.4 Метод конформного преобразования

Ранее было установлено, что для изучения плоскопараллельного потока идеальной жидкости, обтекающего какой-нибудь контур, достаточно знать комплексный потенциал этого потока $w(z)$. Так как непосредственное определение этой функции даже для простейших контуров представляет значительные трудности, то во многих задачах комплексный потенциал находят косвенным путём с помощью метода так называемого *конформного отображения*, играющего большую роль как в задачах теории крыла, так и в других проблемах гидроаэродинамики плоскопараллельного потока идеальной жидкости.

Метод конформных отображений позволяет перейти от частного случая — обтекание круглого цилиндра, к построению комплексных потенциалов потоков, обтекающих тела (профили) произвольной формы.

Сущность метода. S — область плоскости комплексного переменного z , в которой задана аналитическая функция

$$\zeta = f(z), \quad (4.49)$$

которая в каждой точке области S плоскости $z = x + iy$ однозначна и дифференцируема.

Геометрически это означает, что каждой точке $z = x + iy$ области S соответствует вполне определённая точка на плоскости

$\zeta = f z = \xi + i\eta$. Совокупность точек $\zeta = f z$, соответствующих точкам области S образует в плоскости ζ новую область S_1 . Следовательно, однозначная аналитическая функция $\zeta = f z$ осуществляет отображение области S плоскости $z = x + iy$ на область S_1 плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. В частности, если в области S провести некоторую линию L , проходящую через произвольную точку z , то в области S_1 ей будет соответствовать некоторая линия L_1 , проходящая через точку $\zeta = f z$ (рис. 4.18).

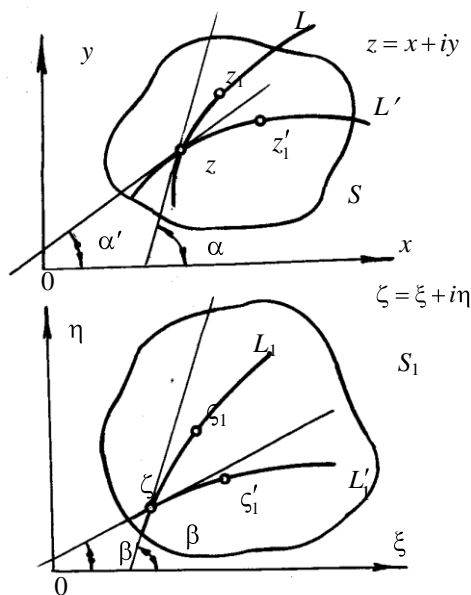


Рис. 4.18 – Конформное отображение

Можно показать, что отображение с помощью аналитических функций обладает свойством сохранения углов во всех точках, где

производная не равна нулю ($\beta' - \beta = \alpha' - \alpha$), и подобия в бесконечно малом.

Отображение, обладающее указанным выше свойством сохранения углов и постоянства растяжений, называется конформным отображением.

Отсюда заключаем, что всякое отображение, устанавливаемое с помощью аналитической функции, будет конформным во всех точках, где производная аналитической функции отлична от нуля.

Примеры конформных отображений

Преобразование инверсии. Рассмотрим отображающую функцию следующего вида

$$\zeta = \frac{l^2}{z}, \quad (4.50)$$

где l – действительная величина.

Для изучения свойств этого преобразования, называемого *преобразованием инверсии*, положим $z = re^{i\alpha}$, $\zeta = Re^{i\beta}$. Подставляя значения

z и ζ в (4.50), получим $R = \frac{l^2}{r}$, $\beta = -\alpha$. Отсюда следует, что преобразование (4.50) приводит и к изменению масштаба и к повороту любых кривых, расположенных в плоскости z . Совместим плоскости комплексного переменного z и ζ на одном чертеже и построим в плоскости z окружность радиуса l с центром в начале координат (рис. 4.19). Эту окружность назовём *кругом инверсии*.

Взяв какую либо точку $A (z = re^{i\alpha})$ внутри окружности радиуса l , определим, в какую точку плоскости ζ перейдёт эта точка в результате преобразования $R = \frac{l^2}{r}$, совершаемого над её модулем r .

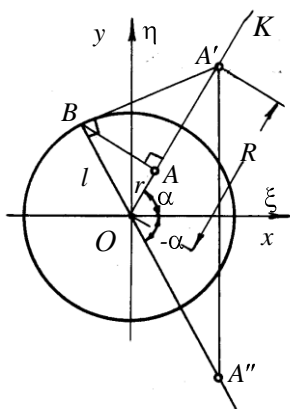


Рис. 4.19 – Круг инверсии

Для этого продолжим линию OA до некоторой точки K вне круга и из точки A проведём перпендикуляр AB до пересечения его с окружностью в точке B .

В точке B проведём касательную к окружности до пересечения с линией OK в точке A' . Из подобия треугольников OBA' и OBA следует $OA'/OB = OB/OA$, то есть $OA' = OB \cdot OB/OA = l^2/r = R$.

То есть преобразование $\frac{l^2}{r}$ переводит точку A в точку A' , называемую зеркальным отображением точки A относительно окружности радиуса l . Теперь нетрудно построить отображение точки A , соответствующее отображающей функции (4.50). Выражение для аргумента в плоскости ζ $\beta = -\alpha$ показывает, что точку A' надо зеркально отобразить относительно действительной оси. Тогда точка A'' , расположенная в плоскости ζ будет являться отображением точки A с помощью (4.50).

Так как при этом преобразовании точка $z = 0$ переходит в точку $\zeta = \infty$, то, очевидно, все точки плоскости z , находящиеся внутри круга инверсии, переходят в точки плоскости ζ , расположенные вне круга инверсии, или, что то же самое, внешность круга плоскости ζ переходит во внутренность круга плоскости z .

Можно доказать теорему, что *преобразование инверсии преобразует окружности и прямые в плоскости z в окружности или прямые в плоскости ζ .*

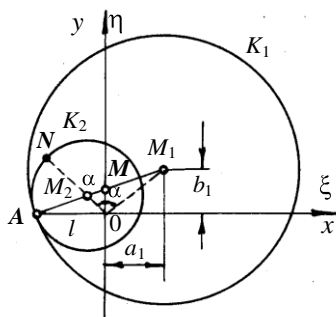


Рис. 4.20 – К преобразованию инверсии $\zeta = \frac{l^2}{z}$

Рассмотрим метод построения окружности в плоскости ζ , в которую переходит с помощью преобразования инверсии окружность произвольного радиуса R , центр которой расположен в точке $M_1 \ a_1, b_1$ плоскости z .

K_1 – окружность в плоскости $z = x + iy$ радиуса R с центром в точке $M_1 \ a_1, b_1$. Обозначим $OA=l$. Отобразим окружность K_1 с помощью преобразования инверсии $\zeta = \frac{l^2}{z}$.

Из предыдущего заключаем, что окружность K_1 , как не проходящая через начало координат, перейдет в плоскости ζ также в окружность, не проходящую через начало координат. Определим уравнение отображенной окружности.

Уравнение данной окружности K_1 имеет вид $x - a_1^2 + y - b_1^2 = R^2$. Из уравнения отображающей функции $\zeta = \frac{l^2}{z}$ находим

$$\zeta = \frac{l^2}{x+iy} = \xi + i\eta; \quad \frac{l^2}{\xi + i\eta} = x + iy = \frac{l^2}{\xi^2 + \eta^2} (\xi - i\eta),$$

или

$$x + iy = \frac{l^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} - i \frac{l^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

то есть

$$x = \frac{l^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{l^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение окружности K_1 , преобразовывая выражение, помня, что $R^2 = l + a_1^2 + b_1^2$ (рис. 4.20), получаем уравнение отображённой окружности K_2 с центром в точке M_2 a_2, b_2 .

$$a_2 = -\frac{a_1 l}{2a_1 + l}, \quad b_2 = \frac{b_1 l}{2a_1 + l}.$$

В итоге мы получаем следующее правило построения окружности K_2 , получаемой из круга K_1 путём преобразования инверсии (рис. 4.20): *из начала координат провести прямую ON под углом $\angle MON$ к оси y , равным углу $\angle MOM_1$ (то есть α); из точки M_2 пересечения прямой ON с прямой AM_1 описать окружность K_2 радиуса AM_2 , которая и будет являться отображением окружности K_1 с помощью преобразования инверсии.*

Преобразование Н.Е. Жуковского. Одной из задач теории крыла является определение геометрических и аэродинамических характеристик профилей, получаемых конформным отображением круга с помощью специально подбираемых для этой цели отображающих функций.

Подобная задача состоит, следовательно, во-первых, в выборе отображающей функции и, во-вторых, в выражении аэродинамиче-

ских характеристик профиля через некоторые параметры, входящие в выбранную функцию, при изменении которых будут получаться различные профили одного и того же семейства.

К числу простейшего семейства теоретических профилей принадлежит серия профилей Н.Е. Жуковского - С.А. Чаплыгина, получаемых из круга с помощью преобразования Н.Е. Жуковского:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right). \quad (4.51)$$

С помощью этого преобразования окружность радиуса l с центром в начале координат (рис. 4.21) отображается в отрезок прямой AB длиной $2l$ в плоскости ζ .

В самом деле, для точек окружности радиуса l будем иметь $z = le^{i\theta}$.

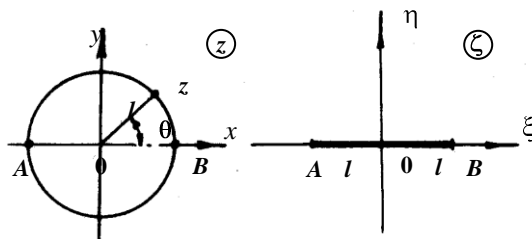


Рис. 4.21 – Преобразование окружности с помощью преобразования Н.Е. Жуковского

Подставляя значение z в формулу (4.51), находим

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right) = \frac{l}{2} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = l \cos \theta,$$

то есть для всех точек окружности (при изменении θ от 0 до 2π) ζ является действительной величиной и изменяется в пределах от $+l$

до $-l$ (при изменении Θ от 0 до π) и от $-l$ до $+l$ (при изменении Θ от π до 2π).

Профили Н.Е. Жуковского – С.А. Чаплыгина.

Поместим в плоскости z окружность K радиуса a с центром M_2 на мнимой оси на некотором расстоянии $OM_2 = f$ от начала координат. Обозначим длину $OA=l$ (рис. 4.22).

Для точек окружности K имеем $z = \rho e^{i\theta}$, где ρ – величина переменная, так как начало координат O не совпадает с центром M_2 круга K . Следовательно,

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{2} \left(\rho e^{i\theta} + \frac{l^2}{\rho} e^{-i\theta} \right) = \frac{1}{2} \left(\rho \cos \theta + i \rho \sin \theta + \frac{l^2}{\rho} \cos \theta - i \frac{l^2}{\rho} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{l^2}{\rho} \right) \cos \theta + i \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{l^2}{\rho} \right) \sin \theta = \xi + i\eta,\end{aligned}$$

то есть

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{l^2}{\rho} \right) \cos \theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{l^2}{\rho} \right) \sin \theta.$$

Умножая первое выражение на $\sin \theta$, второе на $\cos \theta$, возводя в квадрат и вычитая, имеем

$$\xi^2 \sin^2 \theta - \eta^2 \cos^2 \theta = l^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.52)$$

Для точки P , положение которой определяется величинами ρ и θ , из треугольников OM_2P и OM_2A следует $a^2 = l^2 + f^2 = f^2 + \rho^2 - 2f\rho \sin \theta$, откуда $\rho - \frac{l^2}{\rho} = 2f \sin \theta$, то есть

$$\eta = f \sin^2 \theta, \quad \sin^2 \theta = \frac{\eta}{f}.$$

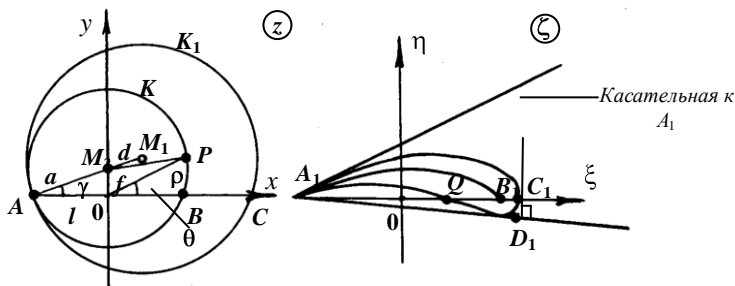


Рис. 4.22 – К построению профилей Жуковского-Чаплыгина

Подставляя значение $\sin^2 \theta$, полученное выше, в уравнение (4.52), после простых преобразований получим уравнение отображённой кривой

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\frac{l^2}{f} - f \right) \eta = l^2,$$

которое легко привести к виду

$$\xi^2 + \left[\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{f} - f \right) \right]^2 = l^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)^2.$$

Как видим, мы получили уравнение окружности, центр которой расположен на мнимой оси в точке $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)$ и радиус которой равен

$$\sqrt{l^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{l^2}{f} - f \right)^2}.$$

Выражение $\sin^2 \theta = \frac{\eta}{f}$ показывает, что отображённая кривая

будет не полной окружностью, а только её дугой, расположенной над действительной осью.

Если в плоскости z взять окружность K радиуса l с центром в начале координат, то (как уже известно) преобразование (4.51) переведёт её в отрезок действительной оси длиной $2l$. Следовательно, преобразование (4.51) переводит точки A и B окружности K в точки A_1 и B_1 , расположенные на действительной оси ξ , расстояние между которыми равно $2l$. То есть отрезок A_1B_1 является хордой дуги A_1B_1 , стрела прогиба которой равна f (следует из $\eta = f \cdot \sin^2 \theta$, при $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\eta_{\max} = f$).

Проведём в плоскости z окружность K_1 с центром в точке M_1 , так, чтобы она касалась окружности K в точке A ; расстояние M_2M_1 обозначим через d . Центр M_1 окружности K_1 естественно лежит на продолжении прямой AM_2 .

Из общего свойства конформных преобразований (сохранение углов) следует, что в точке A_1 контур профиля должен иметь общую касательную с дугой A_1B_1 , а также с выпуклой и вогнутой частями профиля (так как окружности K и K_1 в точке A касаются друг друга). Кроме того, ясно, что точка C окружности K_1 должна перейти в некоторую точку C_1 , лежащую на продолжении отрезка A_1B_1 . Кроме точки A_1 профиль не имеет общих точек с дугой A_1B_1 , то есть в окрестности точки C_1 он должен иметь плавное закругление.

Примерный вид получаемого таким способом профиля, называемого профилем Жуковского-Чаплыгина, показан на рис. 4.22.

Из построения профиля очевидно, что длина его хорды A_1D_1 определяется величиной l , его толщина – величиной d , его выпуклость – величиной f .

A_1D_1 – хорда профиля, A_1C_1 – *теоретическая хорда*.

Таким образом, определённый класс профилей может быть получен, как впервые показал Н.Е. Жуковский, с помощью преобра-

зования (4.51) методом округления дуги круга. Независимо от Н.Е. Жуковского рассматриваемый класс профилей был получен С.А. Чаплыгиным в работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела».

4.5 Графический метод построения профилей Н.Е. Жуковского-С.А. Чаплыгина. Теорема Жуковского- Чаплыгина о результирующей силе давления

В 1912 году известный русский механик профессор А.П. Котельников указал простой графический способ построения профиля Жуковского-Чаплыгина, позже применённый немецким аэродинамиком Треффтц.

Совместим плоскости z и ξ (рис. 4.23). $AO = l$; $MO = f$ – параметр, характеризующий вогнутость профиля. На продолжении гипотенузы AM треугольника AOM отложим $MM_1 = d$ – параметр, характеризующий толщину профиля. Из точки M_1 опишем окружность K_1 радиуса AM_1 . Вспомогательный круг K_2 с центром в точке M_2 получаем из круга K_1 посредством преобразования $\zeta = \frac{l^2}{z}$ инверсии, рассмотренного ранее.

Соответствующие точки этих кругов лежат на прямых, являющихся зеркальным отображением друг друга относительно действительной оси. Следовательно, проводя из начала координат ряд прямолинейных лучей, наклонённых к действительной оси под углами ε_1 и $-\varepsilon_1$, ε_2 и $-\varepsilon_2$, и т.д., в точках их пересечения с окружностями найдём соответствующие друг другу точки A_1 и A'_1 , A_2 и A'_2 , и т.д. Учитывая, что преобразование $\xi = z$ переводит произвольную точку окружности K_1 саму в себя заключаем, что преобразование

задача была решена в 1906 году Н.Е. Жуковским в работе «О соединённых вихрях», а затем обобщена в 1910 году С.А. Чаплыгиным.

Допустим, что задан плоский поток, обтекающий без срыва цилиндрическое тело произвольной формы, ограниченное в плоскости x – y контуром L .

V – скорость на контуре. Давление p в точке M :

$$p = C - \frac{\rho V^2}{2},$$

$p dS$ – элементарная сила в M . Проекции результирующей силы на координатные оси:

$$X = - \int_L p \sin \alpha dS, \quad Y = + \int_L p \cos \alpha dS. \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} Y + iX &= \int_L \left(C - \frac{\rho V^2}{2} \right) \cos \alpha - i \sin \alpha dS = \\ &= - \frac{\rho}{2} \int_L V^2 \cos \alpha - i \sin \alpha dS, \end{aligned} \quad (4.54)$$

так как

$$\begin{aligned} \int_L C \cos \alpha dS &= C \int_L \frac{dx}{dS} dS = C \int_L dx = 0, \\ \int_L C \sin \alpha dS &= C \int_L \frac{dy}{dS} dS = C \int_L dy = 0, \end{aligned}$$

ибо координаты x и y при полном обходе контура L принимают первоначальное значение.

Преобразуем (4.54). Так как на контуре скорость направлена по касательной, то $\frac{d\varphi}{dS} = V$, или $d\varphi = V dS$. С другой стороны, так как контур L является линией тока, на которой $\psi = const$, то на контуре L $dw = d\varphi + i\psi = d\varphi$ и потому

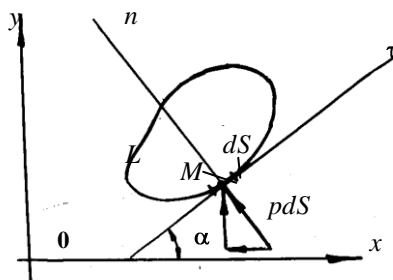


Рис. 4.24 – К доказательству теоремы Жуковского-Чаплыгина о результирующей силе давления

$$VdS = dw. \quad (4.55)$$

Кроме того, на контуре L для комплексной скорости dw/dz имеем (см. (4.35))

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = V \cos \alpha - iV \sin \alpha = V \cos \alpha - i \sin \alpha. \quad (4.56)$$

Подставляя (4.55) и (4.56) в уравнение (4.54), получаем

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \int_L \frac{dw}{dz} dw, \text{ а так как } dw = \frac{dw}{dz} dz, \text{ то окончательно} \quad (4.57)$$

$$Y + iX = -\frac{\rho}{2} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Эта формула, позволяющая для потока, заданного комплексным потенциалом w , найти X и Y , а следовательно, и выражение для полной силы давления $P = \sqrt{X^2 + Y^2}$, носит название *формулы Жуковского-Чаплыгина*.

Определение величины подъёмной силы теоретического профиля Н.Е. Жуковского-С.А. Чаплыгина. Для известного комплексного потенциала w ζ обтекания этого профиля на основании (4.57)

$$Y + iX = -\frac{1}{2}\rho \oint \left(\frac{dw}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = P_y + iP_x$$

задача о вычислении подъёмной силы сводилась бы к нахождению вычета квадрата комплексной скорости. Однако непосредственное построение комплексного потенциала для профиля Жуковского-Чаплыгина сопряжено со значительными трудностями. Поэтому задачу вычисления подъёмной силы профиля Жуковского-Чаплыгина будем решать методом, основанным на конформном отображении этого профиля на круглый цилиндр.

Для циркуляционного обтекания цилиндра радиуса r_0 (рис. 4.25) комплексный потенциал, как известно, имеет вид

$$w(z) = -V_\infty \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z.$$

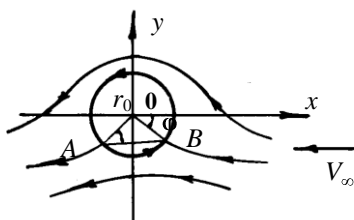


Рис. 4.25 – Циркуляционное обтекание цилиндра радиуса r_0

Знак “минус” перед V_∞ связан с направлением скорости на бесконечности V_∞ параллельно действительной оси в противоположную сторону положительного направления.

Выражение для циркуляции Γ имеет вид (см. (4.30)):

$$\Gamma = -4\pi r_0 V_\infty \sin \varphi. \quad (4.58)$$

Знак “минус” в этом выражении появился в связи с тем, что для углов, расположенных в третьем и четвертом квадрантах, определяющих положение критических точек A и B , синус отрицателен (а $\Gamma > 0$).

Величина циркуляции определяется величиной V_∞ и величиной угла φ , определяющего положение критических точек.

Циркуляция скорости при конформном отображении не изменяется. Это следует из выражения для циркуляции в плоскости z

$$\Gamma = \oint \left(\frac{dw}{dz} \right) dz. \text{ При переходе от плоскости } z \text{ к плоскости } \zeta \text{ с по-}$$

мощью конформного преобразования $\zeta = f(z)$ имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}, \text{ а } dz = \frac{dz}{d\zeta} d\zeta. \text{ Подставляя эти выражения в форму-}$$

лу для Γ , получаем:

$$\Gamma_z = \oint \left(\frac{dw}{dz} \right) dz = \oint \left(\frac{dw}{d\zeta} \right) d\zeta = \Gamma_\zeta.$$

Определим зависимость между скоростями обтекания окружности и профиля крыла.

$w(z)$ – комплексный потенциал потока, обтекающего цилиндр;

$\zeta(z)$ – функция, реализующая конформное отображение внешней области цилиндра на внешнюю область профиля.

Тогда

$$\bar{v} = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}} = \frac{\bar{V}}{\frac{d\zeta}{dz}},$$

где \bar{v} – комплексная скорость в плоскости ζ профиля,

\bar{V} – комплексная скорость в плоскости z цилиндра.

Функция, реализующая конформное отображение в рассматриваемом случае имеет вид $\zeta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right)$, откуда

$$\bar{v} = \frac{2\bar{V}}{1 - l^2/z^2}. \quad (4.59)$$

Отсюда ясно, что скорость на профиле (см. рис. 4.22) может обратиться в бесконечность в точке $z = -l$, соответствующей задней кромке профиля. Это можно устранить (см. (4.59)), если скорость в точке на окружности, соответствующей задней кромке профиля, будет равна нулю. Таким образом, мы приходим к известной гипотезе Н.Е. Жуковского – С.А. Чаплыгина о сходе потока с профиля, которая в данном случае может быть сформулирована следующим образом: *отображение должно быть выполнено таким образом, чтобы критической точке на окружности соответствовала задняя кромка крыла.*

Гипотеза Жуковского-Чаплыгина даёт возможность *однозначно* определить величину циркуляции и имеет поэтому в аэродинамике исключительно большое значение.

Как отмечает профессор Л.Г. Лойцянский “Эти две глубокие идеи великих русских аэродинамиков Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина: *присоединённый вихрь* (возникновение циркуляции – прим. авт.) и *постулат конечности скорости на задней кромке крыла* – легли в основу всей современной теории крыла”.

В силу доказанного свойства постоянства циркуляции при конформном отображении и пользуясь теоремой Н.Е. Жуковского для профиля, можно записать

$$P_y = Y = \rho v_\infty |\Gamma|,$$

или с учётом (4.58)

$$P_y = \rho v_\infty 4\pi r_0 V_\infty \sin \varphi,$$

где v_∞ – скорость обтекания профиля крыла. В нашем случае, как следует из (4.59),

$$2V_{\infty} = v_{\infty}.$$

Следовательно,

$$P_y = 2\pi r_0 \rho v_{\infty}^2 \sin \varphi. \quad (4.60)$$

Значение угла φ легко определить из построения самого профиля. В самом деле, пусть мы имеем окружность K_1 радиуса r_0 ($AM_1 = r_0$), обтекаемую потоком, скорость которого на бесконечности составляет угол β с действительной осью (см. рис. 4.26). A и B – критические точки.

$$\varphi = \alpha + \delta = \beta + \gamma, \quad (4.61)$$

где α – угол атаки, отсчитанный от хорды профиля;

β – угол атаки, отсчитанный от теоретической хорды;

γ и δ – углы построения и для различных профилей Жуковского-Чаплыгина имеют различное значение.

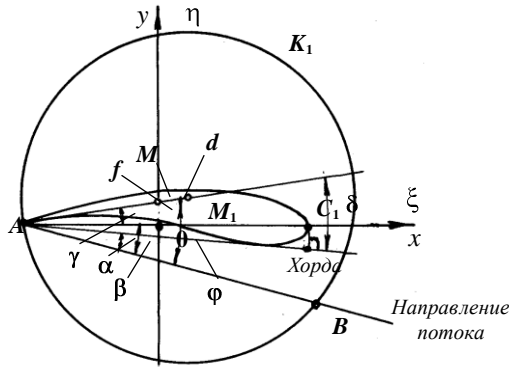


Рис. 4.26 – К определению величины подъемной силы для профиля Жуковского-Чаплыгина

Таким образом

$$P_y = 2\pi r_0 \rho v_{\infty}^2 \sin \delta + \alpha. \quad (4.62)$$

Из (4.62) следует, что при $\alpha = -\delta$ сила $P_y = 0$, поэтому угол $\alpha = -\delta$ называют углом атаки нулевой подъемной силы.

Введя безразмерный коэффициент подъёмной силы C_y , можно записать

$$P_y = C_y \cdot S \cdot \rho \frac{v_\infty^2}{2}, \quad (4.63)$$

где $S = b \cdot l$ (b – длина хорды).

Сравнивая (4.62) и (4.63), находим

$$C_y = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin \delta + \alpha = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin \gamma + \beta. \quad (4.64)$$

Для тонких профилей с малой вогнутостью можно приближённо считать, что $b \approx 2r_0$, следовательно $C_y = 2\pi \sin \delta + \alpha$. Это выражение справедливо и для ряда профилей, не принадлежащих к серии профилей Жуковского-Чаплыгина.

Для малых углов атаки $\sin \alpha + \delta \approx \alpha + \delta$, а $dC_y/d\alpha = 2\pi$, то есть теоретический наклон кривой зависимости коэффициента подъёмной силы от угла атаки C_y α равен 2π .

Из соотношений (4.64) и (4.63) следует, что при $\beta = 0$:

$$C_y = 4\pi \frac{r_0}{b} \sin \gamma, \quad \text{а} \quad P_y = 2\pi r_0 \rho v_\infty^2 \sin \gamma. \quad (4.65)$$

Из рис. 4.26 для r_0 и $\sin \gamma$ получаем $r_0 = \sqrt{f^2 + l^2} + d$, $\sin \gamma = \frac{f}{\sqrt{f^2 + l^2}}$. Тогда выражение для подъёмной силы P_y можно привести к виду

$$P_y = 2\pi \rho v_\infty^2 f \left(1 + \frac{d}{\sqrt{f^2 + l^2}} \right).$$

Положив в этой формуле $d = 0$, получаем

$$P_y = 2\pi \rho v_\infty^2 f, \quad (4.66)$$

то есть величина подъёмной силы дугового профиля при $\beta = 0$ зависит только от его стрелы прогиба. Этот результат впервые получен С.А. Чаплыгиным в 1910 году в работе «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела», в которой он исследовал теорию дугообразных профилей.

Из вышесказанного следует, что установление конформного соответствия между исследуемым профилем крыла и кругом радиуса r_0 позволяет полностью решить задачу об обтекании профиля плоским потоком несжимаемой жидкости. Однако отыскание такого конформного преобразования в явном виде для профиля произвольной формы представляет большие трудности. Поэтому применяют приближённые методы решения задачи обтекания крыловых профилей произвольной формы. Обтекание профилей произвольной формы строится в основном или методом приближённого конформного отображения или методом, основанным на замене профиля крыла системой вихрей, непрерывно расположенных вдоль его средней линии.

4.6 Основы теории вихрей. Основные теоремы вихревого течения идеальной жидкости

Вихревое течение в отличие от потенциального характеризуется тем, что вектор угловой скорости $\vec{\omega} \neq 0$. Изучение вихревых движений в жидкости имеет большое практическое значение, так как в реальной жидкости наблюдается довольно часто. Так, наблюдая движение воды в реке, легко заметить образование вихрей за опорами мостов, за кормой лодок и катеров, при ударе вёсел о воду, при обтекании преград и т.д. На образование вихревой области затрачивается энергия, что является источником особого типа сопротивления, которое называется вихревым сопротивлением и которое надо уметь вычислять для различных тел.

Наблюдающиеся в атмосфере смерчи и циклоны также являются вихрями. Мелкие вихри составляют основу турбулентных течений, изучение которых представляет одну из сложнейших проблем современной аэрогидродинамики.

Вихревая линия – линия, касательная к которой в каждой точке определяет направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Вихревая трубка – трубка, поверхность которой образована вихревыми линиями. По определению ни одна вихревая линия не может пересекать вихревую трубку.

По аналогии с линиями тока дифференциальное уравнение вихревых линий можно представить в виде

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \quad (4.67)$$

Для характеристики вихревых трубок в аэродинамике используют понятие о *напряжении*, или *интенсивности*, вихря. Под напряжением (интенсивностью) вихря \aleph понимают удвоенное произведение угловой скорости ω на площадь нормального сечения вихревой трубки σ_n . Если вектор $\vec{\omega}$ во всех точках сечения σ_n имеет одно и то же значение, то

$$\aleph = 2\omega\sigma_n. \quad (4.68)$$

Напряжённость связана с циркуляцией скорости Γ по некоторому контуру. Эта связь устанавливается на основании *теоремы Стокса*.

Для элементарного прямоугольного контура со сторонами dx и dy в плоском движении идеальной жидкости (в предположении, что вдоль каждой стороны контура скорости одинаковы) циркуляция при движении против часовой стрелки будет равна:

$$d\Gamma = udx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx - vdy ,$$

$$d\Gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} dxdy = 2\omega_z d\sigma_z .$$

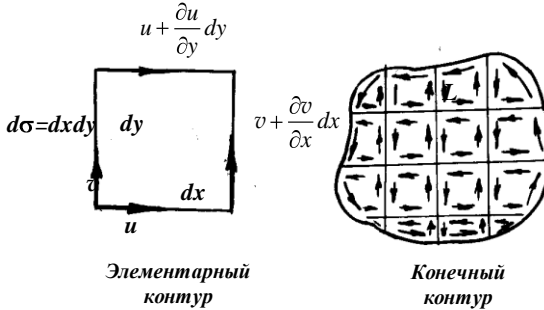


Рис. 4.27 – К выводу теоремы Стокса

Распространяя полученный результат на произвольно расположенную в пространстве бесконечно малую прямоугольную площадку $d\sigma$, будем иметь

$$d\Gamma = 2\omega_n d\sigma = 2\omega d\sigma_n , \quad (4.69)$$

где ω_n – составляющая вектора $\vec{\omega}$ на нормаль к площадке.

Следовательно, *циркуляция по бесконечно малому прямоугольному контуру равна удвоенной интенсивности вихря, пронизывающей этот контур.*

Полученный результат можно легко распространить на произвольный конечный плоский контур L (см. рис. 4.27). Суммируя циркуляции по всем бесконечно малым прямоугольникам, замечаем, что циркуляции по смежным сторонам прямоугольников будут взаимно уничтожаться, как разные по знаку. Следовательно, в пределе при неограниченном увеличении числа бесконечно малых прямоугольников суммарная циркуляция даст циркуляцию вдоль контура

L (так как в пределе вписанный многоугольник превратится в контур L , и поэтому

$$\Gamma = 2 \int_A \omega_n d\sigma . \quad (4.70)$$

Этот вывод обобщается и на случай произвольной пространственной поверхности, опирающейся на контур L . Формула (4.70) является математической записью следующей теоремы Стокса: *циркуляция скорости по произвольному контуру равна удвоенной сумме напряжений вихрей, охватываемых этим контуром.*

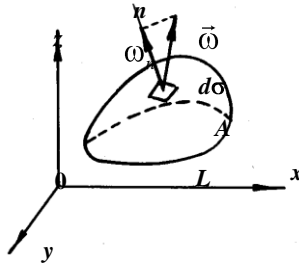


Рис. 4.28 – Произвольная поверхность A в пространстве, пронизываемая потоком вихрей

Теорема Томсона. Решает вопрос о существовании вихрей в идеальной жидкости во времени. Выделим в потоке жидкий контур L , то есть контур, соединяющий одни и те же жидкие частицы и движущийся вместе с ними, и вычислим изменение циркуляции во времени $d\Gamma/dt$.

По определению циркуляции

$$\Gamma = \int_L u dx + v dy + w dz ,$$

отсюда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_L u dx + v dy + w dz = \int_L \frac{d}{dt} u dx + v dy + w dz .$$

В результате почленного дифференцирования произведения двух переменных, стоящих под знаком интеграла, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} u dx &= \frac{du}{dt} dx + u \frac{d}{dt} dx = \frac{du}{dt} dx + u du, \\ \frac{d}{dt} v dy &= \frac{dv}{dt} dy + v \frac{d}{dt} dy = \frac{dv}{dt} dy + v dv, \\ \frac{d}{dt} w dz &= \frac{dw}{dt} dz + w \frac{d}{dt} dz = \frac{dw}{dt} dz + w dw.\end{aligned}$$

Используя уравнение Эйлера (2.15), получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \left[f_x dx + f_y dy + f_z dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + d \frac{V^2}{2} \right].$$

Массовые силы, по предположению, обладают потенциалом $U(x, y, z)$. Тогда имеем

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dU(x, y, z),$$

то есть

$$f_x = X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad f_y = Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad f_z = Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Таким образом, под интегралом стоят полные дифференциалы от потенциала массовых сил U , от функции давления p и квадрата скорости V , то есть

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L d \left(\frac{V^2}{2} + U - \frac{p}{\rho} \right). \quad (4.71)$$

Так как рассматривается циркуляция по замкнутому контуру, когда начальная A и конечная B точки интегрирования совпадают, то

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left(U + \frac{V^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right)_B - \left(U + \frac{V^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right)_A = 0, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Полученный результат выражает теорему Томсона: *циркуляция жидкости по замкнутому жидкому контуру в идеальной баротропной жидкости, обладающей однозначным массовым потенциалом, не меняется с течением времени.*

Теорема Томсона нами доказана для случая несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. Однако она остаётся справедливой и для сжимаемой жидкости.

В этом случае $\frac{d\Gamma}{dt}$ примет вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L d \left[U + \frac{V^2}{2} - \int \frac{dp}{\rho} \right],$$

а далее следуют те же рассуждения, которые приводят к равенству $\frac{d\Gamma}{dt}$ нулю.

Из теоремы Томсона вытекает важный вывод. Если в идеальной жидкости отсутствуют вихри, то есть циркуляция по любому замкнутому контуру внутри жидкости равна нулю, то, следовательно, в жидкости вихрей не было раньше и не будет впредь. Наоборот, если в идеальной жидкости существуют вихри, то они не могут исчезнуть. К этому выводу легко прийти из простых физических соображений. Действительно, поскольку в идеальной жидкости отсутствуют касательные напряжения, следовательно, в ней отсутствуют силы, которые могли бы привести во вращение жидкую частицу или, наоборот, остановить это вращение. А это и означает, что вихревое движение в идеальной жидкости не может самопроизвольно возникнуть, а если оно в ней существует, то затухнуть уже не может.

Теорема Томсона справедлива лишь для идеальной жидкости. Однако из этого нельзя сделать вывод о непригодности теоремы для объяснения отдельных явлений, происходящих и в вязкой жидкости.

В некоторых случаях приходится рассматривать различные состояния жидкости, следующие одно за другим через короткий промежуток времени; тогда с достаточным для практических целей приближением можно рассматривать циркуляцию неизменной по замкнутому жидкому контуру, то есть считать, что за этот малый промежуток времени вязкость не оказывает существенного влияния на рассматриваемое явление. Указанное позволяет применить теорему Томсона для объяснения возникновения циркуляции вокруг тела в жидкости.

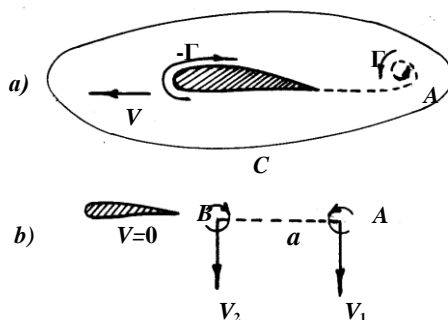


Рис. 4.29 – Возникновение циркуляции вокруг обтекаемого потоком тела

Предположим, что в покоящуюся жидкость погружен вертикально цилиндрический профиль (рис. 4.29a). В начальный момент времени циркуляция по некоторому контуру C , охватывающему цилиндр будет равна нулю. Двинем теперь цилиндр рывком влево. При этом, как показывает опыт, с цилиндра сбежит так называемый *разгонный вихрь* A , обладающий циркуляцией Γ . Так как циркуляция по контуру C (по теореме Томсона) остаётся равной нулю, то, очевидно, вокруг профиля возникает циркуляция, в точности равная циркуляции вихря A , но противоположная по знаку. Наличие циркуляции вокруг цилиндра легко доказать, если его быстро остановить. В этом случае с профиля сбежит второй вихрь B (рис. 4.29b), циркуля-

ция которого равна циркуляции вихря A , но обратна по знаку. Образующаяся пара вихрей будет двигаться поступательно вниз со скоростью $V_1 = V_2 = \frac{\Gamma}{2\pi a}$, где a – расстояние между вихрями A и B .

Теоремы Гельмгольца о вихрях. В работе «О вихревом движении» (1858 г.) Гельмгольц сформулировал и доказал три теоремы, устанавливающие условия сохранения вихревого движения в идеальной жидкости.

Теорема 1. *Интенсивность (напряжение) вихревой трубки не меняется по её длине.*

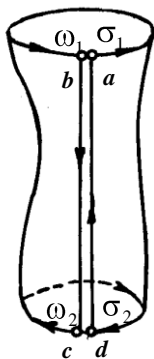


Рис. 4.30 – К доказательству неизменности интенсивности (напряжения) вихревой трубки по её длине

Рассмотрим элемент вихревой трубки (рис. 4.30), проведя разрез вдоль её образующей. Циркуляция по контуру “манжеты” $\Gamma = \Gamma_{ab} + \Gamma_{bc} - \Gamma_{cd} - \Gamma_{da}$. Знак минус определяет противоположные направления обхода линий ab и bc . $|\Gamma_{bc}| = |\Gamma_{da}|$. То есть $\Gamma = \Gamma_{ab} - \Gamma_{cd}$. Рассматриваемый контур охватывает вихревую трубку, но его поверхность ни одна вихревая нить не пересекает. Следовательно, по теореме Стокса

найденная выше циркуляция скорости должна равняться нулю: $\Gamma = \Gamma_{ab} - \Gamma_{cd} = 0$.

Отсюда $\Gamma_{ab} = \Gamma_{cd}$. Поверхности, охватываемые контурами ab σ_1 и cd σ_2 , пересекают всю вихревую трубку и согласно той же теореме Стокса $\Gamma_{ab} = 2\omega_1\sigma_1 = 2\omega_2\sigma_2$. Так как сечения вихревой трубки были выбраны совершенно произвольно, то

$$\omega\sigma = const . \quad (4.72)$$

Уравнение (4.72) аналогично уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости ($V\sigma = const$). Отсюда можно сделать вывод (очень важный) о сохранении *в пространстве* вихревых трубок.

Устойчивое существование вихревой трубки возможно, если она либо будет замкнутой на себя, то есть образует вихревые кольца, либо концы вихря будут лежать на границах рассматриваемой жидкости, либо один конец будет опираться на границу жидкости, а другой – на твёрдую поверхность (землю, стенку и т.д.).

Теорема 2. *В идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных массовых сил, вихревая трубка не разрушается и всегда остаётся вихревой трубкой.*



Рис. 4.31 – К доказательству неразрушаемости вихревой трубки

Для доказательства возьмём на боковой поверхности рассматриваемой вихревой трубки замкнутый контур L , проходящий через одни и те же частицы жидкости. Так как площадь, охватываемая контуром L вихрями не пронизывается ($\omega_n = 0$), то циркуляция по этому контуру согласно теореме Стокса равна нулю, то есть $\Gamma_L = 0$ /

. Но так как по теореме Томсона циркуляция в этом случае со временем не будет изменяться, то, следовательно, она всегда будет равна нулю. Это означает, что через контур L никогда вихревые линии не пройдут, и контур L останется лежать на боковой поверхности вихревой трубки, то есть вихревая трубка не разрушится.

Указанное свойство вихрей справедливо только для идеальной жидкости. В реальной жидкости происходит процесс затухания – диффузия вихря.

Теорема 3. В идеальной жидкости, находящейся под действием потенциальных массовых сил, напряжение вихревой трубки не меняется с течением времени.

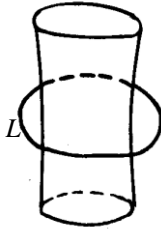


Рис. 4.32 – К доказательству неизменности напряжения вихревой трубки с течением времени

Пусть контур L охватывает рассматриваемую вихревую трубку (рис. 4.32). Циркуляция по этому контуру согласно теореме Томсона остаётся неизменной. Но так как по теореме

Стокса циркуляция Γ_L равна напряжению вихревой трубки, то, следовательно, и напряжение со временем меняться не будет.

Формула Био-Савара о вихревом влиянии. Найдём скорость, индуцированную вихрем произвольной формы и напряжением Γ в какой либо точке M (рис. 4.33)

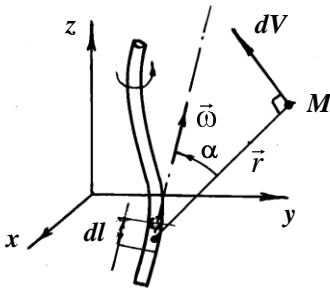


Рис. 4.33 – К расчёту скоростей, вызванных вихрем произвольной формы

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl. \quad (4.73)$$

Элемент вихревой нити напряжением Γ и длиной dl индуцирует в точке M x, y, z скорость dV , определяемую по формуле (4.73), направленную по нормали к плоскости, со-

держащей $d\vec{l}$ и \vec{r} . Формула (4.73) устанавливает интересную аналогию с электродинамикой.

Здесь r – расстояние от элемента до точки M , α – угол между радиусом вектором, проведенным между точкой M и элементом, и направлением элемента вихря.

Прямолинейная вихревая нить. Известно: напряжение прямолинейного вихря $\mathfrak{L} = \Gamma, h, \alpha_1$ и α_2 .

$$dl = CD = \frac{CK}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} d\alpha.$$

Из $\triangle OMC$: $r = \frac{h}{\sin \alpha}$. Подставляя в (4.73), находим:

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin^2 \alpha}{h^2} \sin \alpha \frac{hd\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi h} \sin \alpha d\alpha.$$

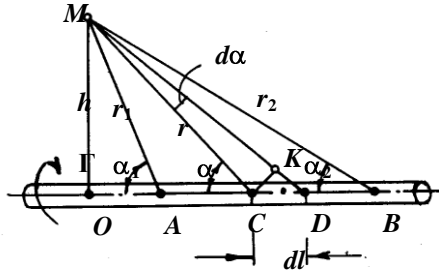


Рис. 4.34 – К расчёту скоростей, вызванных прямолинейным бесконечно длинным вихрем

Скорость, индуцируемая участком вихря AB в точке M равна:

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi h} \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1. \text{ Для бесконечно длин-}$$

ного “полушнура” $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$.

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Для бесконечно длинного вихревого шнура $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$.

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}.$$

4.7 Общее уравнение для потенциала скоростей

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее стационарное, без вращения частиц, без трения, изэнтропное течение идеального газа.

Отсутствие вращения частиц жидкости позволяет ввести потенциал скорости φ , являющейся функцией с непрерывными производными, определяющимися уравнениями (4.4).

При выводе уравнения для потенциала скоростей будем исходить из уравнения неразрывности движения (2.5), которое в случае установившегося движения в функции потенциала скоростей принимает форму

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \varphi_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho \varphi_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho \varphi_z = 0.$$

Здесь мы обозначили

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_y, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_z.$$

Или, раскрывая скобки, получаем

$$\rho \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + \varphi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \varphi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (4.74)$$

Исключим отсюда плотность ρ с помощью уравнений движения идеальной жидкости – *уравнений Эйлера*.

В векторной форме уравнение Эйлера можно записать в виде (2.14):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (4.75)$$

где $\vec{f} = X, Y, Z$ – вектор объёмной силы, отнесенной к единице массы.

Так как $p_x = p_y = p_z = p$, то в проекциях на прямоугольную систему координат уравнение (4.75) запишется

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Полная производная сложной функции имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Или можно записать

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Пренебрегая объёмными силами, получим в случае установившегося движения через потенциал скоростей уравнения (4.76) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \left(\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \left(\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \left(\varphi_x \varphi_{xz} + \varphi_y \varphi_{yz} + \varphi_z \varphi_{zz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Так как среда баротропна ($\rho = f(p)$), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial z}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (4.77), можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(\varphi_x \varphi_{yx} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\frac{\rho}{a^2} \left(\varphi_x \varphi_{zx} + \varphi_y \varphi_{zy} + \varphi_z \varphi_{zz} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.74), получаем

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} + \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2}\right) \varphi_{zz} - \\ &- 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} \varphi_{xy} - 2 \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} \varphi_{yz} - 2 \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} \varphi_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Местная скорость звука конечно не является постоянной, а изменяется с изменением φ согласно (3.14):

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} u^2 + v^2 + w^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2. \quad (4.79)$$

Подставляя (4.79) в уравнение (4.78), мы получаем дифференциальное уравнение для φ в функциях x , y и z , которое удовлетворяет закону сохранения массы, уравнениям движения (полученным на базе второго закона Ньютона) и законам термодинамики.

Уравнение (4.78) является уравнением второго порядка. Дифференциальное уравнение называется *линейным*, когда зависимая переменная и её производная входят в уравнение только в линейной форме. В уравнении (4.78), однако, мы имеем квадратные члены вида φ_x^2 и кубические члены вида $\varphi_x^2 \varphi_{xx}$ и $\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}$, что означает, что уравнение (4.78) является *нелинейным*.

Важной особенностью линейных уравнений является то, что решения могут быть составными; то есть если $\varphi_1(x, y, z)$ и $\varphi_2(x, y, z)$ являются соответственно решениями линейного дифференциального уравнения, то $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$ также является решением, где A_1 и A_2 являются произвольными постоянными.

Многие математические трудности механики сжимаемой жидкости являются следствием того факта, что уравнения являются нелинейными, в связи с чем невозможно построить сложное решение путём составления (сложения) простых известных решений.

Следует ещё раз подчеркнуть, что дифференциальное уравнение для φ , полученное выше, относится к потоку, который является и стационарным, и невращающимся. Если бы поток был нестационарным, уравнение (4.78) должно быть в другом виде.

Вопросы для самопроверки

1. Какое движение называется потенциальным?
2. Дайте определение потенциала скорости и функции тока.
3. Почему допустимо сложение потенциальных потоков несжимаемой жидкости?
4. Приведите примеры простейших потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости и их наложения.
5. Сформулируйте теорему Н.Е. Жуковского.
6. Что такое конформное отображение? Приведите примеры конформных отображений.
7. Продемонстрируйте графический метод построения профилей Жуковского.
8. Сформулируйте постулат Жуковского-Чаплыгина.
9. Что такое вихревая линия, вихревая трубка?
10. Сформулируйте теоремы Стокса, Томсона и Гельмгольца о вихрях.
11. Получите общее уравнение для потенциала скоростей.

ГЛАВА 5.

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

5.1 Распространение возмущений в газе при движении в нём материальной точки

Для простоты будем представлять себе вначале, что в сжимаемой среде движется прямолинейно и равномерно тело малых размеров (материальная точка), являющееся источником малых, упругих возмущений. Для неподвижной точки возмущения распространяются равномерно во все стороны по прямым, исходящим из этой точки (рис. 5.1а).

Через равные промежутки времени изменение давления достигало бы сферических поверхностей с центром в источнике возмущений и равномерно нарастающим радиусом (скорость его нарастания равна a).

Как только источник возмущения начнёт двигаться, произойдёт нарушение симметрии в этой картине. Центры сферических поверхностей, ограничивающих в разные моменты времени возмущённую область, будут смещаться с той же скоростью V , с которой движется источник возмущений. Если $V < a$, то картина будет такая, как изображено на рис. 5.1*b*: возмущения, вызванные источником, опережают его.

Если источник возмущения движется с такой же скоростью, с какой распространяются возмущения, то он всё время находится на границе возмущённой области (рис. 5.1*c*). Возмущения, вызванные источником, не будут в этом случае распространяться в область, находящуюся перед ним.

Рассмотрим теперь случай, когда источник возмущения движется со сверхзвуковой скоростью и, следовательно, с такой же скоростью движется центр сферической поверхности, ограничивающей в данный момент времени зону распространения возмущения для каждого положения источника (рис. 5.1*d*).

Так как источник возмущения движется с постоянной скоростью, то пройденный им путь пропорционален времени, что справедливо и для радиуса сферической поверхности распространения возмущений. Поэтому сферические поверхности, соответствующие положениям источника в разные моменты времени, имеют огибающую поверхность в виде конуса, вершина которого находится в центре источника, а ось совпадает с направлением движения. Этот конус называется *конусом возмущения*. В область вне этого конуса не проникают вызванные источником возмущения; они распростра-

няются только внутри конуса. Наблюдатель, находящийся вне конуса, не услышит издаваемого источником звука, даже если источник пройдёт мимо него. Звук дойдёт до наблюдателя лишь тогда, когда поверхность конуса достигнет наблюдателя.

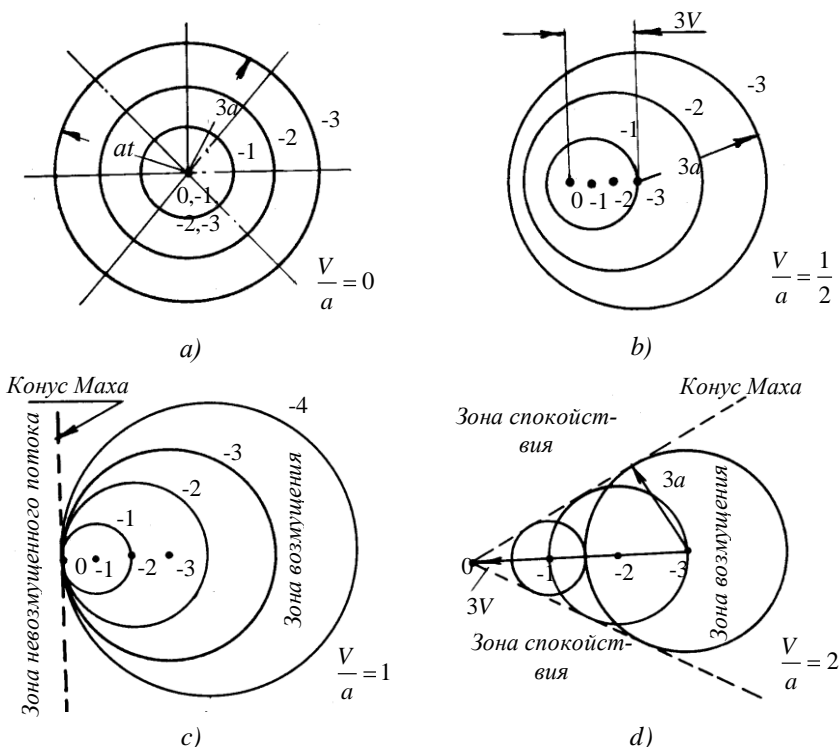


Рис. 5.1 – Распространение малых возмущений в газе, генерируемых движущейся в нём материальной точкой (источником возмущений):

a) – источник возмущения неподвижен ($V/a=0$); b) – дозвуковое течение ($V/a=1/2$); c) – трансзвуковое движение ($V/a=1$); d) – сверхзвуковая скорость перемещения источника возмущения ($V/a=2$).

Рис. 5.1d иллюстрирует три правила сверхзвукового потока, предложенные фон-Карманом. Эти правила точно применимы

только для малых возмущений, но обычно являются качественно приемлемы и для сильных возмущений.

Правило запрещённых сигналов. Эффект изменения давления, полученный от тела, движущегося со скоростью, превышающей скорость звука, не может достичь точек, находящихся впереди тела.

Зона возмущения и зона невозмущённого потока. Стационарный (неподвижный) точечный источник в сверхзвуковом потоке влияет только на точки, лежащие на или внутри конуса Маха, распространяющемуся вниз от точечного источника.

Наоборот, давление и скорость в произвольной точке потока могут быть изменены только под влиянием возмущений, вызванных точками, лежащими на или внутри конуса, расположенного вверх по потоку от рассматриваемой точки и имеющего ту же вершину, что и конус Маха (рис. 5.2).

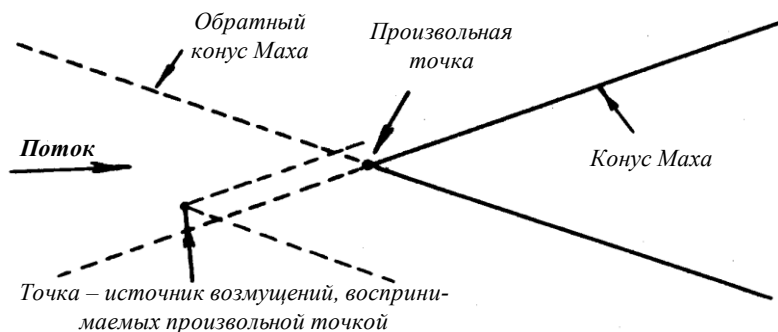


Рис. 5.2 – К иллюстрации правила Кармана о зоне возмущения и зоне невозмущённого потока

Правило концентрированного возмущения. Близость окружностей, представляющих различные импульсы давлений на рис. 5.1 является мерой интенсивности изменения давления в каждой точке в поле потока. Так для неподвижного (стационарного) источника

интенсивность изменения давления является симметричной относительно источника. Для дозвукового источника (рис. 5.1*b*) интенсивность является несимметричной. В случае сверхзвукового источника мы имеем правило концентрированного возмущения: изменение давления является сильно сконцентрированным в непосредственной близости конуса Маха, который формирует внешнюю границу зоны возмущений.

5.2 Число Маха и угол Маха

Итак ранее мы показали, что природа течения зависит от сравнительной величины скорости потока и скорости звука.

Отношение этих двух скоростей, как уже указывалось в главе 3, называется числом Маха.

$$M = \frac{V}{a}.$$

Напомним, что скорость звука в этом уравнении взята при местной температуре и давлении потока и, конечно, изменяется от точки к точке в поле потока.

Полуугол конуса Маха (рис. 5.1*d*), называемый углом Маха, является величиной, обратно пропорциональной числу Маха

$$\sin \alpha \equiv \frac{1}{M}.$$

Заметим, что угол Маха является величиной нереальной для дозвукового потока.

5.3 Критическое значение числа Маха. Скачки уплотнения в газовом потоке

Представим себе, что в сжимаемой среде движется тело конечных размеров, а не материальная точка. В этом случае в разных

местах поверхности тела будут разные скорости. Рассмотрим для простоты симметричное обтекание тела. В носовой точке тела скорость равна нулю. При удалении от носовой точки вдоль контура продольного сечения тела скорость сначала нарастает, становится больше скорости набегающего потока V_∞ , достигает максимального для данного случая значения V_{max} и затем убывает вплоть до хвостовой точки тела (рис. 5.3).

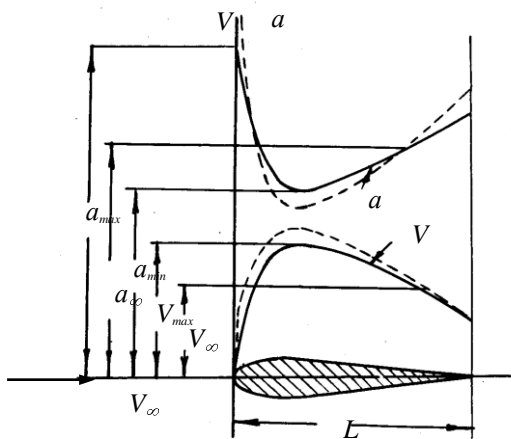


Рис. 5.3 – Распределение скорости потока и скорости звука на поверхности тела конечных размеров

Из уравнения (3.14) мы знаем, что

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const.$$

Отсюда видим, что чем больше в том или ином сечении данной струйки скорость движения газа, тем меньше в этом сечении скорость распространения звука.

При малых скоростях набегающего потока V везде остаётся меньшим a , то есть график a расположен над графиком V .

Однако по мере увеличения V_∞ эти две кривые сближаются друг с другом в том месте, где одна имеет максимум, а другая – минимум.

Значение числа Маха M_∞ , при котором на поверхности тела достигается местная скорость течения, равная местной скорости звука, называется *критическим значением числа* M_∞ для данного тела. Оно всегда меньше или равно единице и зависит прежде всего от относительной толщины тела: чем тоньше тело, тем больше значение $M_{кр}$; для продольно обтекаемой бесконечно тонкой пластинки оно равно единице.

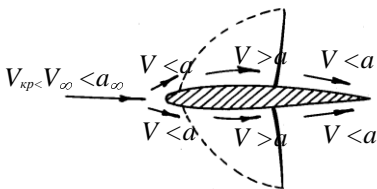


Рис. 5.4 – Обтекание тела конечных размеров дозвуковой скоростью $M_\infty > M_{кр}$

При обтекании тела потоком газа, имеющим на бесконечности дозвуковую скорость, у поверхности тела образуются в случае $M_\infty > M_{кр}$ замкнутые области, где газ движется со сверхзвуковой скоростью. Опыты показывают, что нарастание скорости течения газа при переходе от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым происходит плавно, тогда как уменьшение скорости при переходе от сверхзвуковых скоростей к дозвуковым (в случае $M_\infty > M_{кр}$) происходит не плавно, а разрывно, скачкообразно.

Причина этого состоит в том, что малые колебания давления, распространяясь в газе со скоростью звука, не могут проникнуть *против потока* из области дозвукового движения в хвостовой части

тела в область сверхзвукового движения в средней части. Граница, замыкающая сверхзвуковую область, является в то же время границей распространения возмущений, исходящих из хвостовой части. Поэтому поток в сверхзвуковой области не успевает перестроиться в соответствии с распределением давления в дозвуковой области. Он как бы слепо натывается на дозвуковой поток. Происходит резкое сжатие среды и в результате этого на границе между сверхзвуковой и следующей за ней дозвуковой областями возникает скачкообразное повышение давления и плотности; оно называется *скачком уплотнения* или *ударной волной*. Расположение скачка уплотнения на данном теле зависит от числа M_∞ .

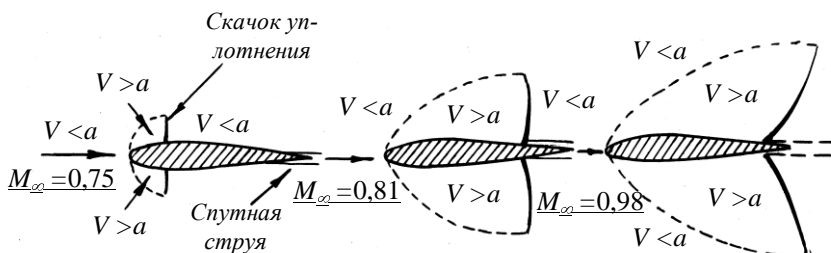


Рис. 5.5 – Расположение скачков уплотнения на поверхности обтекаемого тела конечных размеров в зависимости от M_∞ ($M_{кр} < M_\infty < 1$)

Когда число M_∞ увеличивается, приближаясь к единице, скачки уплотнения перемещаются вместе с границей сверхзвуковой области по направлению к хвосту тела (рис. 5.5). При числе M_∞ несколько большим единицы, появляется ещё один скачок уплотнения. Он располагается перед телом вблизи носка. Его происхождение такое же, как происхождение тех скачков уплотнения, о которых речь шла выше. Набегающий поток является в данном случае сверхзвуковым, тогда как возле носовой точки, которая представляет собой точку торможения потока, находится область малых, во

всяком случае, дозвуковых скоростей. На границе между сверхзвуковой областью и находящейся перед носком дозвуковой областью происходит резкое сжатие потока и возникает скачок уплотнения (рис. 5.6).

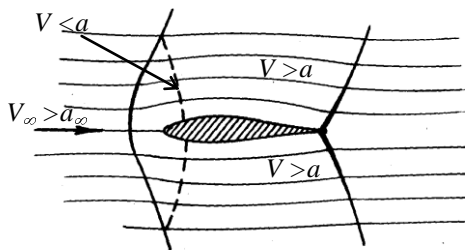


Рис. 5.6 – Обтекание тела конечных размеров при числе M_∞ несколько большим единицы

При дальнейшем увеличении числа M_∞ размеры дозвуковой области перед носком сокращаются, скачок уплотнения становится наклонным и приближается к телу.

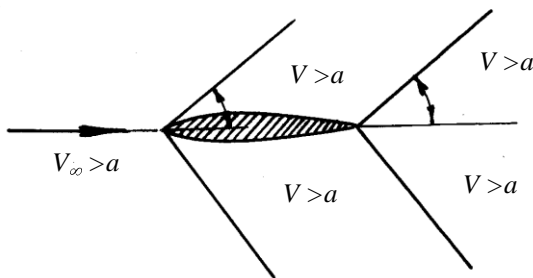


Рис. 5.7 – Обтекание заострённого тела конечных размеров сверхзвуковым потоком

Если носок достаточно заострён, то скачок уплотнения вплотную придвигается к носку (рис. 5.7). Такой скачок уплотнения называется *присоединённым скачком*, в отличие от предыдущего, который можно назвать *отсоединённым*.

Линии тока могут пересекать поверхность скачка уплотнения под разными углами. Если линии тока перпендикулярны к поверхности скачка уплотнения, то он называется *прямым скачком*. Линии тока могут пересекать скачок уплотнения под острым углом; такой скачок уплотнения называется *косым скачком*. Косые скачки уплотнения могут пересекать сверхзвуковую область, упираясь одним из своих концов в прямой скачок, замыкающий эту область. В этом случае получается так называемый *лямбдаобразный скачок* (от греческой буквы λ , на которую он похож) (рис. 5.8).

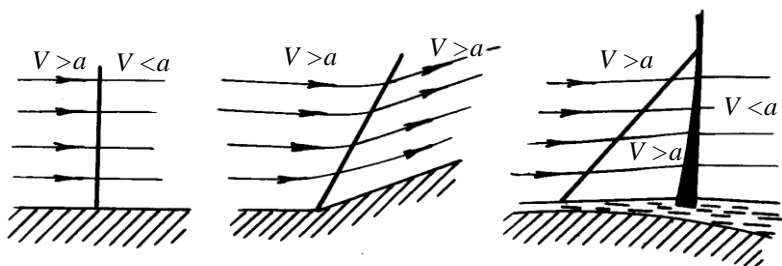


Рис. 5.8 – К классификации скачков уплотнения (прямой, косой и лямбдаобразный скачки)

На рис. 5.8. изображены прямой, косой и лямбдаобразный скачки уплотнения.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте три правила фон-Кармана для сверхзвукового потока.
2. Что такое число Маха, угол Маха, критическое значение числа Маха?
3. В чём причина возникновения скачков уплотнения? Какие виды скачков Вам известны?

Задачи

5.1. Летательный снаряд в полёте движется с более или менее конически очерченным скачком перед ним. Из физических соображений очевидно, что на большом

расстоянии от снаряда эта волна скачка становится строго конической и изменение в скорости и плотности при переходе через скачок становится бесконечно малыми.

Фотографии полёта пули показывают, что на большом расстоянии от пули обший угол наклона конуса равен $50,3^\circ$.

Давление и температура невозмущённого воздуха $0,101325 \text{ МПа}$ и 38°C соответственно.

Определить скорость пули в м/с и число Маха пули относительно невозмущённого потока.

5.2. Сверхзвуковой самолёт движется на высоте $H = 8000 \text{ м}$ со скоростью 450 м/с ($T_H = 236 \text{ К}$). Через сколько времени наблюдатель услышит звук от пролетевшего мимо него самолёта?

5.3. Стреловидное крыло с углом $\gamma = 40^\circ$ движется во встречном потоке со скоростью 250 м/с . Скорость потока, набегающего на крыло 250 м/с , а температура 20°C . Выяснить находится ли крыло в возмущённой области и с какой скоростью будет обтекаться нормальное сечение крыла.

5.4. Угол Маха при движении точки составляет $\gamma = 30^\circ$. Определить скорость распространения звука, если скорость движения точки равна $V = 400 \text{ м/с}$.

5.5. Определить угол наклона крыльев для сверхзвукового самолета, если максимальная скорость его движения составит $V = 2500 \text{ км/час}$. Потолок самолета $H = 22000 \text{ м}$, где температура составляет $t = -70^\circ\text{C}$.

5.6. Найти скорость звука, числа M и λ для струи воздуха, вытекающей из баллона со скоростью, равной половине максимальной теоретической скорости истечения.

Температура в баллоне 127°C .

5.7. Какие параметры (давление, температуру) должен иметь воздух в форкамере сверхзвуковой трубы, чтобы при расчетном расширении он вытекал в атмосферу со скоростью 800 м/с при $t = -70^\circ\text{C}$?

Каково при этом будет соотношение между плотностью воздуха в струе и плотностью при нормальных условиях?

Имеется ввиду простейшая труба с соплом, открытым в атмосферу.

5.8. Какую максимальную скорость воздуха можно получить в сверхзвуковой трубе без подогрева, если учесть, что воздух сжимается при $T = 78 \text{ К}$?

Примечание: Опыты показывают, что в движущемся воздухе сжатие наступает при температуре ниже $T = 78 \text{ К}$.

5.9. Воздух течет по трубе переменного сечения. Число Маха в первом сечении трубы $M_1 = 1$, а во втором сечении $M_2 = 2$. Каково соотношение между скоростями воздуха в первом и втором сечениях?

5.10. Как изменится кинетическая энергия единицы объема воздуха при движении по расширяющейся трубе с увеличением числа M от $M_1 = 1$ до $M_2 = 2$?

Объяснить результат.

ГЛАВА 6.

ПЛОСКОЕ ДО- И СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

6.1 Суть метода линеаризации

Хотя дифференциальное уравнение в функции потенциала скоростей для стационарного, невращающегося, изэнтропийного движения получено нами ранее (4.76), точное решение таких уравнений для аэродинамических задач весьма сложно. Поэтому можно идти двумя путями: (i) найти точное решение для сравнительно небольшого числа задач в надежде получить качественное понимание природы других аэродинамических задач, для которых точные решения не получены (не возможны); или (ii) найти простые, даже приближённые решения, удовлетворяющие практическим расчётам. Оба метода важны и в конечном счёте, дополняют друг друга; так несколько точных решений служат оценочным критерием в точности и возможности применения приближённых методов.

Ниже мы рассмотрим как второй способ может быть применён к некоторым важным задачам двумерного дозвукового потока.

Допущение двумерного потока служит первым приближением к задачам течения через осевые турбины и компрессоры, обтекания

крыльев самолёта и лопастей пропеллеров. Во многих вышеперечисленных случаях изменения скоростей, вызванные телом или телами, находящимися в потоке, являются малыми, вследствие малой толщины тел. Следовательно, мы имеем суть метода линеаризации – поток может быть представлен как комбинация однородной параллельной скорости, на которую накладываются небольшие изменения скоростей. Целесообразность в таком допущении, как мы увидим позже, лежит в том, что уравнение движения существенно упрощается и становится линейным. Поэтому этот метод называется *теорией линеаризации* или *методом малых возмущений*.

6.2 Линеаризация уравнения для потенциала скоростей.

Уравнение движения. Для стационарного, невращающегося, изоэнтропийного движения дифференциальное уравнение для потенциала скоростей определяется (4.76) и (4.77):

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} = 0. \quad (6.1)$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} \Phi_x^2 + \Phi_y^2, \quad (6.2)$$

$$\Phi = [m^2/сек], \Phi_x = m/сек, \Phi_{xx} = 1/сек,$$

где символ Φ представляет сложный потенциал скорости, в отличие от потенциала изменения скорости, обозначенного ϕ в этом параграфе.

Составляющие возмущения. Определим скорость в любой точке как сумму векторов постоянной скорости V_∞ вдоль оси x и скорости возмущения u и v в x и y направлениях соответственно.

Для тонкого профиля, движущегося через бесконечную среду со скоростью $-V_\infty$, скорость газа по отношению к профилю будет V_∞ в точках, отдалённых от профиля. Вблизи профиля x и y составляющие скорости будут $(V_\infty + u)$ и v соответственно. Скорости возмущения u и v являются весьма малыми по сравнению со скоростью свободной струи V_∞ . Выразим потенциал скорости Φ как сумму потенциала главной скорости V_∞ и *потенциал возмущения* ϕ , связанного со скоростями возмущения u и v :

$$\Phi = V_\infty x + \phi.$$

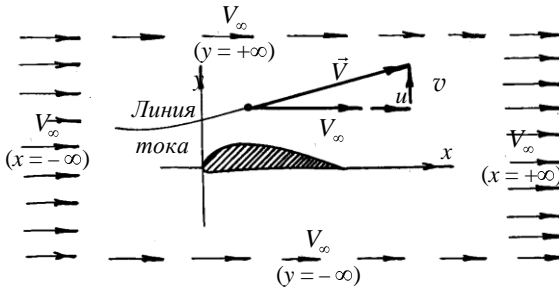


Рис. 6.1 – Определение скорости обтекания тела конечных размеров через составляющие возмущения.

Беря производные, помня что $V_\infty = const$, получаем

$$\Phi_x = V_\infty + \phi_x = V_\infty + u; \quad \Phi_{xx} = \phi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \Phi_y = \phi_y = v;$$

$$\Phi_{yy} = \phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Phi_{xy} = \Phi_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Используя уравнение (6.2), мы получаем, помня, что $a_0 = const$

$$a^2 + \frac{k-1}{2} [V_\infty + u]^2 + v^2 = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2,$$

где a_∞ является скоростью звука в точках, где скорость течения равна V_∞ .

Преобразуем это выражение:

$$a^2 + \frac{k-1}{2} [V_\infty^2 + 2uV_\infty + u^2 + v^2] = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2,$$

$$a^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right] = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2} V_\infty^2,$$

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{k-1}{2} V_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right],$$

$$a^2 = a_\infty^2 \left(1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right] \right).$$

Окончательно получаем:

$$\frac{a_\infty^2}{a^2} = \frac{1}{1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left[2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right]},$$

где $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$.

Из геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

мы получаем соотношение

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Тогда предыдущее выражение запишется в виде

$$\frac{a_{\infty}^2}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2 \left(2 \frac{u}{V_{\infty}} + \frac{u^2 + v^2}{V_{\infty}^2} \right) + O \left(M_{\infty}^4 \frac{u^2}{V_{\infty}^2} \right) + \dots,$$

где символ [O] означает “величина порядка”.

Исследуем относительные величины коэффициентов при Φ_{xx} , Φ_{yy} и Φ_{xy} в уравнении (6.1).

Для коэффициента при Φ_{xx} мы имеем

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} &= 1 - \frac{V_{\infty} + u^2}{a^2} = 1 - \frac{V_{\infty} + u^2}{V_{\infty}^2} \cdot \frac{V_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} \cdot \frac{a_{\infty}^2}{a^2} = \\ &= 1 - \frac{V_{\infty} + u^2}{V_{\infty}^2} \cdot \frac{a_{\infty}^2}{a^2} M_{\infty}^2 = 1 - \left(1 + \frac{u}{V_{\infty}} \right)^2 M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2} = \\ &= 1 - M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2} - 2 \frac{u}{V_{\infty}} M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2} - \frac{u^2}{V_{\infty}^2} M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение для $\frac{a_{\infty}^2}{a^2}$, которое запишем в виде

$$\frac{a_{\infty}^2}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2 \frac{u}{V_{\infty}} + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2 \frac{u^2 + v^2}{V_{\infty}^2} + \dots,$$

мы получаем

$$1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} = 1 - M_{\infty}^2 - \frac{k-1}{2} M_{\infty}^4 \frac{u}{V_{\infty}} - 2 M_{\infty}^2 \frac{u}{V_{\infty}} - O \left(M_{\infty}^4 \frac{u^2}{V_{\infty}^2} \right) - \dots$$

Предположим теперь, что возмущения скорости являются настолько малыми по сравнению с V_{∞} , что мы можем записать

$$M_{\infty}^2 \left(\frac{u}{V_{\infty}} \right)^2 \ll 1; \quad M_{\infty}^2 \left(\frac{v}{V_{\infty}} \right)^2 \ll 1; \quad M_{\infty}^2 \left(\frac{u \cdot v}{V_{\infty}^2} \right)^2 \ll 1.$$

Окончательно имеем

$$1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} \cong 1 - M_{\infty}^2 - \left[2M_{\infty}^2 + k - 1 \right] M_{\infty}^4 \frac{u}{V_{\infty}}.$$

Второй коэффициент в уравнении (6.1) можно записать в виде

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{V_{\infty}^2} \cdot \frac{V_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} \cdot \frac{a_{\infty}^2}{a^2}.$$

Подставляя сюда значение для $\frac{a_{\infty}^2}{a^2}$, получаем как и ранее

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} = 1 - M_{\infty}^2 \frac{u^2}{V_{\infty}^2} - O \left(M_{\infty}^4 \frac{uv^2}{V_{\infty}^3} \right) - \dots$$

Упрощая, имеем

$$1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} \cong 1.$$

Для третьего коэффициента в (6.1) получаем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} &= 2 \frac{V_{\infty} + u}{a^2} \frac{v}{V_{\infty}} = 2 \frac{V_{\infty} v + uv}{V_{\infty}^2} \cdot \frac{V_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} \cdot \frac{a_{\infty}^2}{a^2} = \\ &= 2 \frac{v}{V_{\infty}} M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2} + 2 \frac{uv}{V_{\infty}^2} M_{\infty}^2 \frac{a_{\infty}^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Снова подставляя сюда значение для $\frac{a_{\infty}^2}{a^2}$, получаем

$$2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} = 2 M_{\infty}^2 \frac{v}{V_{\infty}} + O \left(M_{\infty}^2 \frac{uv}{V_{\infty}^2} \right) + \dots$$

Упрощая, имеем

$$2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \cong 2 M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty}.$$

Подставляя в (6.1) полученные значения коэффициентов, мы имеем приближённое дифференциальное уравнение (при подстановке мы помним, что $\Phi_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$; $\Phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\Phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$), которое запишется в виде

$$1 - M_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{2M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \right) \left(\frac{u}{V_\infty} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \frac{\partial v}{\partial y} - 2M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Однако, несмотря на уже сделанные допущения, это уравнение не является линейным, так как содержит квадратичные члены $u \frac{\partial u}{\partial x}$ и $v \frac{\partial v}{\partial x}$. Введём дополнительные допущения

$$\frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \cdot \frac{u}{V_\infty} \ll 1 \quad \text{и} \quad M_\infty^2 \frac{v}{V_\infty} \ll 1$$

и получаем следующее линейное уравнение

$$1 - M_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

или

$$1 - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (6.3)$$

Как указывалось выше, уравнение (6.3) является линейным дифференциальным уравнением. Рассмотренный метод носит на-

звание метода линеаризации, а сам поток – линеаризованным потоком. При $M_\infty < 1$ уравнение (6.3) является уравнением эллиптического типа, при $M_\infty > 1$ – гиперболического типа.

6.3 Линеаризованное уравнение Бернулли

Получим специальную форму уравнения Бернулли, основанной на допущениях теории линеаризации.

Мы получили ранее (стр. 173) для $\frac{a^2}{a_\infty^2}$:

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = \frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right).$$

Для изоэнтروпийного течения мы имеем

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left[1 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

По формуле бинома Ньютона

$$1 + q^n = 1 + nq + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} q^2 + \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{3!} q^3 + \dots + q^n$$

мы можем записать

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{k}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u}{V_\infty} + \frac{u^2 + v^2}{V_\infty^2} \right) + O \left(M_\infty^4 \frac{u^2}{V_\infty^2} \right) + \dots$$

Вспомнив принятые нами допущения

$$M_\infty^2 \left(\frac{u}{V_\infty} \right)^2 \ll 1, \quad M_\infty^2 \left(\frac{v}{V_\infty} \right)^2 \ll 1,$$

а также то, что

$$M_{\infty}^2 = \frac{V_{\infty}^2}{a_{\infty}^2} = \frac{V_{\infty}^2}{\left(k \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \right)},$$

получаем

$$\frac{p}{p_{\infty}} = 1 - \frac{k}{2} \frac{V_{\infty}^2}{V_{\infty}} 2 \frac{u}{k p_{\infty}} \rho_{\infty} = 1 - \frac{u \rho_{\infty}}{p_{\infty}} V_{\infty}.$$

Откуда имеем

$$p - p_{\infty} = -\rho_{\infty} V_{\infty} u. \quad (6.4)$$

Это выражение называется *линеаризованное уравнение Бернулли*.

6.4 Двухмерный дозвуковой поток с малыми возмущениями

Преобразуем уравнение (6.3), приведя его к уравнению Лапласа. Для этого, производя следующую замену переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \sqrt{1 - M_{\infty}^2}, \quad (6.5)$$

вычислим производные от потенциала ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2};$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \frac{d y_1}{d y} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_{\infty}^2};$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{d y_1}{d y} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \right) \cdot \sqrt{1 - M_{\infty}^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1^2} (1 - M_{\infty}^2).$$

Подставляя значения производных в уравнение (6.3), приведём его к виду уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = 0. \quad (6.6)$$

Известно, что уравнению Лапласа удовлетворяет потенциал скорости потока несжимаемой жидкости. Переход от уравнения (6.3) к уравнению (6.6) с помощью замены переменных позволяет, пользуясь уравнением Лапласа, найти потенциал скорости потока несжимаемой жидкости $\varphi(x_1, y_1)$, обтекающей некоторый новый контур. Если в найденном по уравнению Лапласа потенциале скорости заменить x_1 через x , а y_1 через $y\sqrt{1-M_\infty^2}$, то получим потенциал скорости для потока сжимаемой жидкости, обтекающей заданный тонкий профиль. При переходе от переменных x, y к переменным x_1, y_1 форма профиля будет меняться.

Рассмотрим характер изменения формы профиля при таком переходе. Допустим, что в плоскости x, y расположен тонкий профиль с хордой b , направленной вдоль оси x и поток сжимаемой жидкости обтекает этот профиль под малым углом атаки со скоростью V_∞ . В таком случае в плоскости x_1, y_1 будем иметь какой-то другой профиль с той же хордой b , обтекаемый потоком несжимаемой жидкости со скоростью $V_{1\infty}$ под новым углом атаки α_1 .

Покажем, что профиль, находящийся в потоке несжимаемой жидкости, будет утолщен в направлении оси y в отношении $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$. Для этого обратимся к рассмотрению изменения скоростей в направлении координатных осей.

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \sqrt{1 - M_\infty^2},$$

то

$$u = u_1, \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

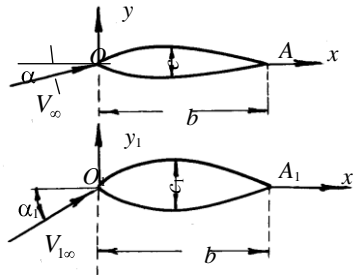


Рис. 6.2 – Тонкому профилю в сжимаемой жидкости соответствует утолщённый в $1/\sqrt{1 - M_\infty^2}$ раз профиль в несжимаемой жидкости, обтекаемый под большим углом атаки.

Из последних формул заключаем, что составляющие скорости по оси x при таком переходе не меняются и в соответствующих точках профиля оказываются равными, а составляющие скорости по оси y увеличиваются в $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ раз. Это означает, что тангенс

углов наклона касательной к линии тока с осью x , равные $\frac{v}{V_\infty + u}$,

также увеличиваются в том же отношении и, следовательно, в таком же отношении увеличивается угол атаки α_1 , то есть

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Изменения углов наклона касательных показывает, что контур профиля O_1A_1 , являющийся линией тока, будет во всех своих точках иметь наклон касательных, увеличенный по сравнению с наклоном касательных к контуру OA в сжимаемой жидкости в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз.

Отсюда заключаем, что максимальная толщина c_1 профиля O_1A_1 будет связана с максимальной толщиной профиля OA соотношением

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1-M_\infty^2}},$$

то есть *тонкому профилю в сжимаемой жидкости соответствует утолщенный профиль в несжимаемой жидкости, обтекаемый под большим углом атаки.*

Таким образом, для определения обтекания тонкого профиля крыла потоком сжимаемой жидкости необходимо рассмотреть обтекание несжимаемой жидкостью профиля, утолщенного в направлении оси y в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз, под углом атаки, увеличенным в столько же раз. Определив для этого фиктивного профиля с помощью уравнения Лапласа потенциал $\Phi(x_1, y_1)$, надо вновь перейти, пользуясь преобразованием (6.5), к потоку сжимаемого газа.

Основываясь на линеаризованном уравнении Бернулли (6.4), мы можем сделать вывод, что подъемная сила для профиля в сжимаемом газе и подъемная сила для утолщенного фиктивного профиля в несжимаемой жидкости одинаковы. Известно, что если в потоке несжимаемой жидкости профиль, хорда которого расположена вдоль оси x , растягивается в направлении оси y в n раз и одновременно в n

раз увеличивается угол атаки α , то коэффициент подъемной силы также увеличивается в n раз. Но с другой стороны рассматриваемый профиль в сжимаемом газе ведет себя так, как утолщенный в

$\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз фиктивный профиль в потоке несжимаемой жидко-

сти. Следовательно, профиль в сжимаемом газе имеет подъемную

силу в $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$ раз большую, нежели в несжимаемой жидкости.

Отсюда вывод – влияние сжимаемости при $M < M_{кр}$ приводит к увеличению коэффициента подъемной силы. Для нахождения коэффициента подъемной силы профиля в сжимаемом газе надо взять значение коэффициента подъемной силы для данного угла атаки на малых скоростях обтекания и умножить на $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$.

6.5 Двухмерный сверхзвуковой поток с малыми возмущениями

Ниже мы рассмотрим приближенный аналитический метод, который применяется к двухмерному сверхзвуковому потоку, невращающемуся с небольшими отклонениями от однородного параллельного потока. Следует, однако, заметить, что большинство сверхзвуковых течений включают скачки, однако (как мы покажем ниже) изменением энтропии при переходе через слабый скачок можно пренебречь.

Метод малых возмущений приемлем при решении таких практических задач как обтекание тонкого крыла самолета с резкими входными и выходными кромками, при течении через турбину и компрессорные решетки из тонких профилей с малыми углами по-

ворота потока, при течении внутри двухмерных труб, при истечении из сверхзвукового сопла в область переменного противодавления.

Ранее мы получили линеаризованное уравнение для потенциала скоростей (6.3)

$$1 - M_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

При этом мы приняли допущения, что

$$\frac{M_{\infty}^2 \frac{u}{V_{\infty}}}{1 - M_{\infty}^2} \ll 1 \quad \text{и} \quad M_{\infty}^2 \frac{v}{V_{\infty}} \ll 1.$$

Уравнение (6.3) теряет смысл в трансзвуковой области, то есть в области, где $M_{\infty} \approx 1$.

Для сверхзвукового течения M_{∞} не может быть слишком большим. Для практических целей максимальная величина M_{∞}^2 должна быть около десяти. Или, более точно, так как $\frac{u}{V_{\infty}}$ и $\frac{v}{V_{\infty}}$ являются величиной такого же порядка как отношение толщины тела $\delta \equiv \frac{c}{b}$ (см. рис. 6.2), мы можем сказать, что линеаризованная теория может быть использована когда $M_{\infty}^2 \cdot \delta$ является величиной малой по сравнению с единицей.

Для дозвукового потока уравнение (6.3) является *эллиптического* типа и может быть приведено к уравнению Лапласа данным выше методом. Для сверхзвукового потока уравнение (6.3) является *гиперболического* типа и может быть приведено к классическому волновому уравнению простым преобразованием. Следовательно линеаризованный сверхзвуковой поток имеет многие свойства, сход-

ные со свойствами колеблющейся металлической пластины, колонки воздуха или стержней, струн. Более полное толкование математических свойств эллиптических и гиперболических дифференциальных уравнений будет дано несколько ниже.

Покажем, что для сверхзвукового потока общее решение уравнения (6.3) можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_1 \left(x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) + \varphi_2 \left(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right),$$

где φ_1 является произвольной функцией аргумента $x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1}$ и φ_2 является произвольной функцией аргумента $x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}$.

Чтобы показать это, исследуем частное решение φ_1 . Беря производные, мы получаем (помня, что $Q = Q(x, y)$):

$$d\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} dQ = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right).$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = \varphi_1' \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \varphi_1' \frac{\partial Q}{\partial y},$$

где φ_1' является первой производной φ_1 по аргументу Q .

$$Q = x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varphi_1'; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \varphi_1';$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \varphi_1''; \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = (M_\infty^2 - 1) \varphi_1''.$$

Подставляя в (6.3) мы видим, что произвольная функция φ_1 удовлетворяет уравнению (6.3) и поэтому является его частным решением. Аналогично можно показать, что φ_2 также является частным решением (6.3). Наша задача теперь заключается в том, чтобы найти частную форму этих функций, соответствующих любой взятой картине течения. Вид этих функций определяется очертанием обтекаемого тела и начальными условиями течения.

Сверхзвуковой поток с малыми возмущениями может быть представлен принятием двух простых случаев, когда или функция φ_1 или φ_2 является вырождающейся, то есть функция является постоянной через все поле потока. Частные решения, полученные таким образом, известны как решения простой волны, или решения с волнами одного семейства.

Определим линии, вдоль которых φ_1 или φ_2 сохраняют постоянные значения. Эти линии являются линиями равного потенциала в тех случаях, когда φ определяется только одной из функций φ_1 или φ_2 , то есть когда по граничным условиям задачи вторую функцию можно положить равной нулю. Функция φ_1 будет сохранять постоянное значение, если

$$x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const} ,$$

функция φ_2 будет сохранять постоянное значение, если

$$x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const} .$$

Первое из этих уравнений представляет собой семейство параллельных друг другу прямых

$$y = -\frac{x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + c_1 ,$$

угловой коэффициент которых равен $-\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$; второе уравне-

ние, которое можно записать в виде

$$y = \frac{x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + c_2,$$

представляет собой семейство параллельных друг другу прямых с угловым коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.

Каждая из линий как первого, так и второго семейства называется *характеристической линией* или *характеристикой* уравнения (6.3)

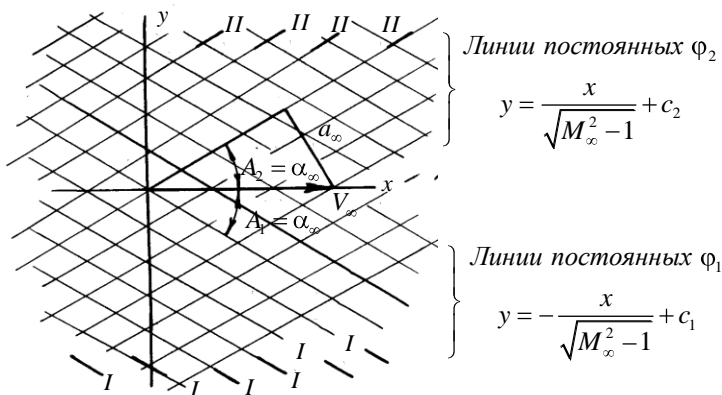


Рис. 6.3 – Линии Маха первого и второго семейств.

Найдем угол наклона A характеристических линий к оси x . Из

равенства $tg A_2 = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ следует, что $\sin A_2 = \frac{1}{M_\infty}$.

Аналогично для второго семейства

$$\operatorname{tg} A_1 = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \text{и, следовательно,} \quad \sin A_1 = -\frac{1}{M_\infty}.$$

Отсюда следует, что угол A представляет собой угол, характеризующий возмущенную область, а характеристики являются линиями Маха.

Так как градиент потенциала возмущения равен вектору изменения скорости и так как градиент потенциала возмущения нормален к линиям постоянного потенциала возмущения, то следует, что изменение в векторе скорости происходит в направлении, перпендикулярном линиям семейства Π .

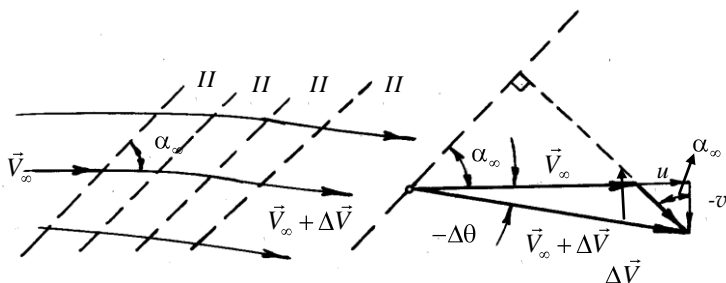


Рис. 6.4 – Диаграмма вектора скорости для линии тока, пересекающей волны давления второго семейства.

Для получения соотношения между изменением в давлении и изменением в направлении линий тока, пересекающей область, где имеются волны давления семейства Π , мы вспомним линеаризованное уравнение Бернулли (6.4).

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty u.$$

Из геометрических фигур рис. 6.4 можем записать

$$u = -v \cdot \operatorname{tg} \alpha_\infty.$$

Далее, если $\Delta\theta$ представляет собой изменение в направлении линии тока, которое будем считать положительным при отсчете против часовой стрелки, то можем записать

$$v = V_{\infty} \Delta \theta.$$

Тогда находим

$$p - p_{\infty} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \Delta \theta \cdot \operatorname{tg} \alpha_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \Delta \theta.$$

Помня, что $a_{\infty}^2 = k \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}$, окончательно имеем

$$p - p_{\infty} = \frac{k p_{\infty} M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \Delta \theta, \quad \Delta p_{I, II} = \mp \frac{k p_{\infty} M_{\infty}^2}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \Delta \theta. \quad (6.7)$$

При получении решения с помощью волн, мы можем построить картину течения, соответствующую граничным условиям, вытекающих из четырех основных типов изменения, зависящих (i) от того, являются ли волны семейством I или II, и (ii) является ли поток ускоряющимся или тормозящимся. Эти случаи изображены на рис. 6.5. Из этих рисунков и уравнения (6.7) мы видим, что давление увеличивается при торможении и уменьшается при ускорении потока. Далее, при сжатии линия тока стремится *по направлению* к линии Маха (линия тока и линия Маха сближаются), в то время как при расширении линия тока отклоняется *прочь* от линии Маха.

Для удобства расчетов введем

$$\Theta = \frac{180}{\pi} \theta,$$

где Θ является отклонением линии тока от оси x в градусах, θ – соответствующее отклонение в радианах.

Также введем безразмерный коэффициент давления

$$P = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}{k p_{\infty} M_{\infty}^2} p + \text{const},$$

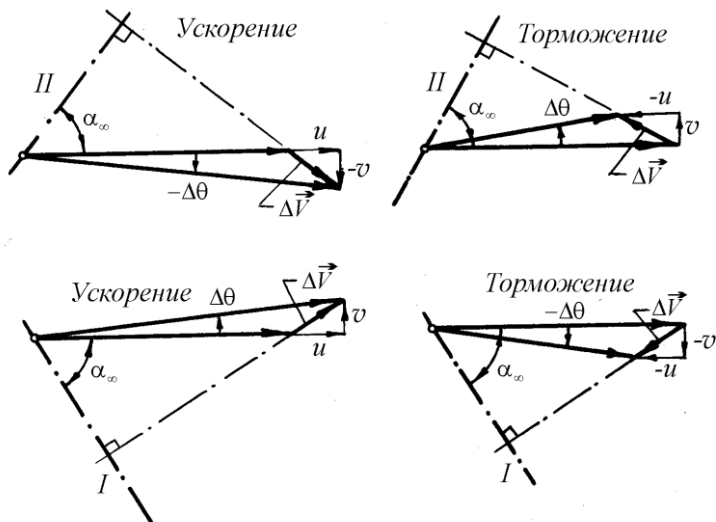


Рис. 6.5 – Четыре основных типа картин течения при получении решения с помощью волн

где постоянная выбирается так, чтобы P принимал удобную числовую величину. Тогда из уравнения (6.7) следует, что для линии тока, пересекающей волны второго семейства

$$\Delta P_{II} = \Delta \Theta$$

и для линии тока, пересекающей волны семейства I

$$\Delta P_I = -\Delta \Theta.$$

Местное значение P определяет местное значение числа Маха через изоэнтропийные соотношения.

На рис. 6.6a и 6.6b приведен пример отражения волны от прямой стенки и годограф скорости для этого случая.

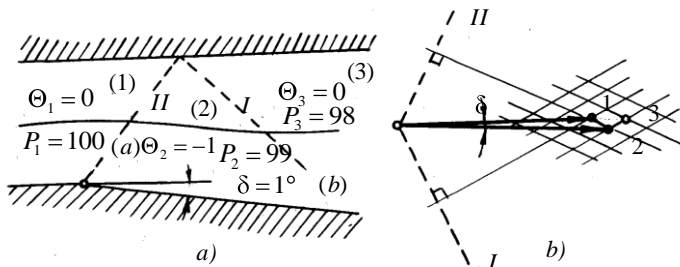


Рис. 6.6 – Отражение волны разрежения от прямой стенки:

а) – волновая картина течения в физической плоскости;

б) – диаграмма годографа скорости.

Вопросы для самопроверки

1. В чём состоит суть метода малых возмущений?
2. Получите линеаризованное уравнение для потенциала скоростей.
3. Выведите линеаризованное уравнение Бернулли.
4. Получите соотношение между изменением в давлении и изменением в направлении линии тока для сверхзвукового потока с малыми возмущениями.

Задачи

6.1. При малых возмущениях потенциал скорости Φ выражается как сумма главной скорости V_∞ и *потенциала возмущения* φ , связанного со скоростями возмущения u и v , то есть $\Phi = V_\infty x + \varphi$.

Пусть $V_\infty = 250 \text{ м/с}$, $\varphi = 6x^2 - 3y^2$, газ-воздух.

а). Показать, что потенциал скорости Φ на всем протяжении оси x ($0 < x < \infty$) удовлетворяет основному линеаризованному уравнению для потенциала скоростей.

б). Показать, что вдоль оси x $M_\infty = 0,707$, $T_1 = 309 \text{ К}$, $T_2 = 304,7 \text{ К}$, $\rho_1/\rho_2 = 1,05$ для сечений $x_1 = 0$ и $x_2 = 1,5 \text{ м}$.

в). Для линии тока, проходящей через точку 1 ($x_1 = 0$ и $y_1 = 1$) определить в точке 2 величину y_2 и наклон линии тока ($x_2 = 1,5$).

6.2. В точке пространства 1 (x_1, y_1), где $\Phi_1 = 1008 \text{ м}^2/\text{с}$, определить величину, направление скорости и T_∞ , если газ-воздух и $\varphi = x^2 - 0,5y^2$. При этом в точке 1 $x_1 = 4 \text{ м}$, $y_1 = 8 \text{ м}^2/\text{с}$.

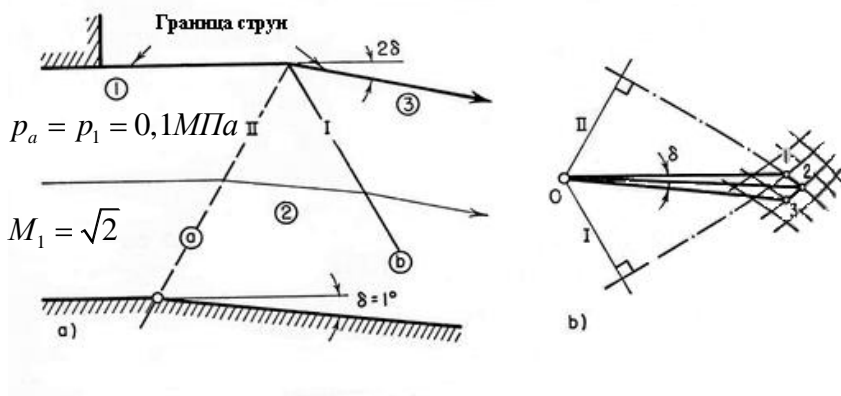
6.3. Профиль обтекается параллельным потоком $V_\infty = 200 \text{ м/с}$.

В точке 1: $x_1 = 0,3 \text{ м}$, $y_1 = 0,15 \text{ м}$, $\Phi_1 = 70 \text{ м}^2/\text{с}$, $V_1 = 210 \text{ м/с}$, $\theta_1 = 1,5^\circ$.

В точке 2: $x_2 = 0,33 \text{ м}$, $y_2 = 0,165 \text{ м}$, $V_2 = 215 \text{ м/с}$, $\theta_2 = 1,25^\circ$.

Определить φ_1 и φ_2 , u_1 , v_1 и u_2 , v_2 , Φ_2 .

6.4. Однородная параллельная струя покидает сопло и подвергается на верхней границе постоянному атмосферному давлению p_a . Нижняя стенка отклоняется на 1° . Определите свойства потока вниз по истечению.

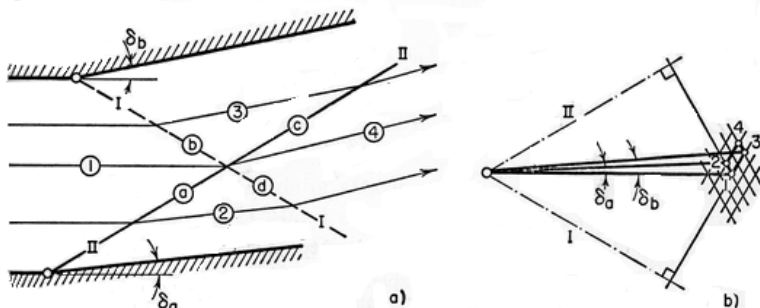


Зад. 6.4

a) Волновая схема, линии тока и свойства потока;

b) Картина течения в плоскости годографа.

6.5. Определить состояние в области 4 по известному состоянию в области 1 и известным поворотным углам δ_a и δ_b ($\delta_a = 2^\circ$, $\delta_b = 4^\circ$, $M_1 = 1,988$, $p_1 = 5 \text{ бар}$).

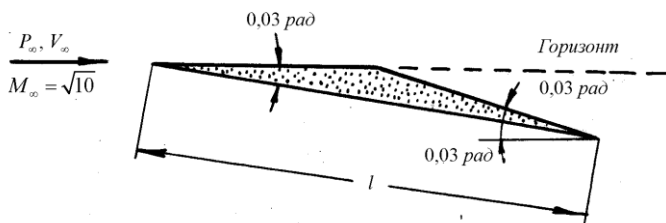


Зад. 6.5

a) Волновая схема, линии тока и свойства потока;

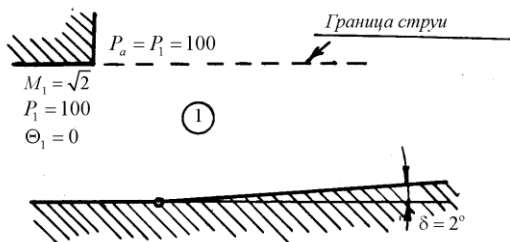
b) Картина течения в плоскости годографа.

6.6. Определить коэффициент подъемной силы C_L и коэффициент сопротивления C_D для следующего крыла самолета.



Зад. 6.6

6.7. Нарисовать волновую схему, картину течения в плоскости годографа и определить параметры потока в каждой области по известному состоянию в струе на выходе из сопла в области 1. Давление на выходе $p_a = p_1$, поворот нижней стенки $\delta = 2^\circ$.

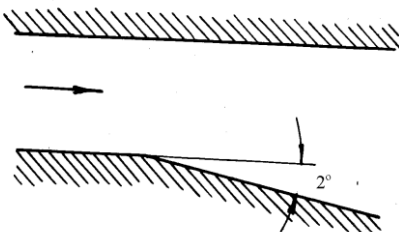


Зад. 6.7

6.8. Двухразмерный канал имеет прямую верхнюю стенку и излом в нижней.

Число Маха и давление первоначально равны 2 и 10 бар соответственно. Используя теорию линеаризации нарисуйте волновую схему, линии тока и определите давление в различных областях с постоянной скоростью.

Нарисуйте картину течения в плоскости годографа.



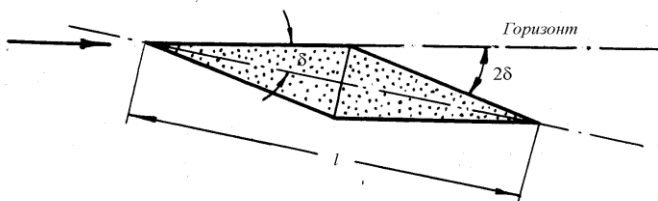
Зад. 6.8

6.9. Используя $M_\infty = \sqrt{2}$, $P_\infty = 10 \text{ бар}$ и угол поворота стенки $|\delta| = 0,05 \text{ радиан}$ дать графические и численные примеры для:

а) Погашения падающей волны разрежения.

б) Волна сжатия падает на твердую границу. В месте падения возникает волна сжатия с интенсивностью вдвое большей падающей волны.

6.10. Определить коэффициент подъемной силы C_L и коэффициент сопротивления C_D для следующего крыла самолета, обтекающегося потоком со значением $M_\infty = \sqrt{2}$, $\delta = 0,05 \text{ радиан}$.



Зад. 6.10

6.11. Расширяющееся сверхзвуковое сопло с прямыми стенками в своей сверхзвуковой части присоединено к прямой трубе.

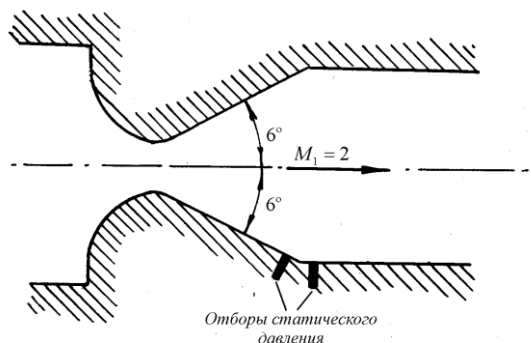
Общий угол между прямыми, образующими сверхзвуковую часть сопла, равен 12° . На выходе из сопла $M = 2,0$.

Два отбора статического давления выполнены в стенке возле переходного угла сопла в прямую трубу: одно отверстие ниже, а другое выше вершины угла.

Определить повышение давления при переходе через угол:

а) в процентах от давления на выходе сопла;

б) в процентах от давления на входе в сопло.



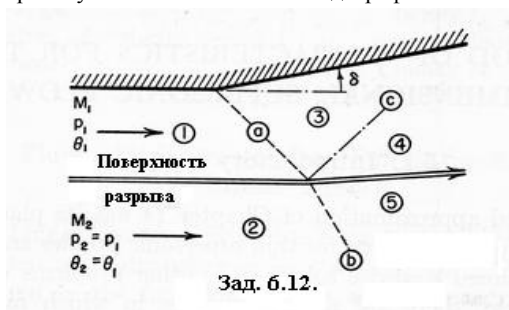
Зад. 6.11

6.12. Рисунок изображает двухмерный сверхзвуковой поток с волной разрыва a , падающий на поверхность разрыва, которая разделяет две области течения, имеющие одинаковые давления и направления, но различные скорости.

Определить параметры воздуха в областях 3, 4 и 5, а также изгиб вихревой пелены β , если $\delta = 0,1 \text{ рад}$.

$$M_1 = \sqrt{5}, \quad p_1 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_1 = 0; \quad M_2 = \sqrt{2}, \quad p_2 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_2 = 0.$$

Построить картинку течения в плоскости годографа.



6.13. Решить задачу аналогичную 6.12, но при условиях:

$$\delta = -0,05 \text{ радиан}; \quad M_1 = \sqrt{2}; \quad M_2 = \sqrt{5}, \quad p_2 = p_1 = 10 \text{ бар}, \quad \theta_2 = \theta_1 = 0.$$

6.14. Рисунок изображает турбинное сопло, срезанное под углом 30° к оси сопла. Сопло, спроектированное для числа Маха равное $\sqrt{2}$, работает при давлении 10 бар в плоскости среза и расширяется в область, где давление $p_a = 9,9 \text{ бар}$.

Пренебрегая трением нарисовать волновую картину и границу струи. Указать волны сжатия сплошными линиями, а линии разряжения – прерывистыми.

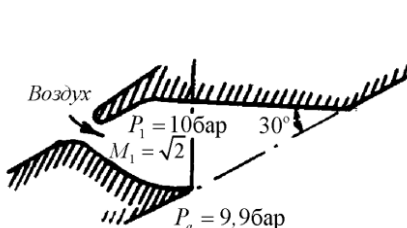
В каждой области течения указать давление (*бар*) и направление (*градусы*).

Продолжить рисунок по крайней мере до точки, где волновая схема начинает повторяться и указать, какая часть рисунка повторяется до бесконечности.

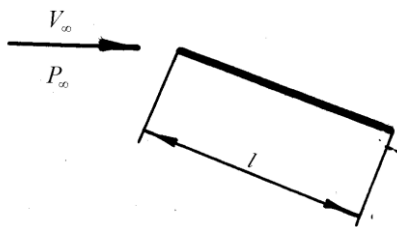
6.15. Показать, что подъемная сила на единицу длины для плоско-пластинчатого профиля при малом угле натекания потока определяется уравнением

$$L = -\rho_\infty V_\infty \Gamma,$$

где Γ – циркуляция вокруг профиля.



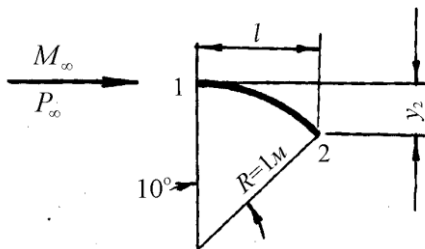
Зад. 6.14



Зад. 6.15

6.16. Рассмотреть тонкий криволинейный профиль, очерченный по дуге окружности. Входная кромка профиля тангенциальна к направлению набегающего потока.

Используя линеаризованную теорию определить подъемную силу L и силу сопротивления D для этого профиля при $M_\infty = \sqrt{2}$, $P_\infty = 1 \text{ бар}$.



Зад. 6.16

ГЛАВА 7.

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

Линеаризованное приближённое решение, рассмотренное выше, широко применяется для получения аналитических соотношений для тонкого сверхзвукового профиля и для быстрого получения упрощённых решений других задач сверхзвукового потока. Конечно, имеется много случаев, когда требуется более точные решения. Для этих целей применяют *метод характеристик*.

7.1 Описание метода характеристик

Наш анализ будет пригоден для двухмерного, невращающегося, изэнтропийного, сверхзвукового потока. Кроме того мы сделаем допущение, что жидкость – идеальный газ, поток стационарный, гравитационными силами можно пренебречь.

Как мы показали ранее (4.76), при таких допущениях поток математически описывается дифференциальным уравнением для потенциала скоростей

$$a^2 - \varphi_x^2 \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + a^2 - \varphi_y^2 \varphi_{yy} = 0. \quad (7.1)$$

Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти решение (7.1), удовлетворяющее данным граничным условиям. Это дифференциальное уравнение в общем виде записывается как

$$A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} = D, \quad (7.2)$$

где коэффициенты A , B , C и D являются функциями в общем случае x , y , φ_x и φ_y .

Вспомним, что $a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$. Рассмотрим здесь только область потока, где свойства жидкости являются неразрыв-

ными. Это означает, что производные φ_x и φ_y (компоненты скорости) являются непрерывными функциями от x и y . Следовательно, мы можем записать для произвольных приращений dx и dy

$$d\varphi_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} dy = \varphi_{xx} dx + \varphi_{xy} dy, \quad (7.3)$$

$$d\varphi_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy = \varphi_{yx} dx + \varphi_{yy} dy. \quad (7.4)$$

Всякое решение уравнения (7.2) может быть представлено в виде трёхмерной поверхности в x, y, φ пространстве, называемой *интегральной поверхностью*, и определено функцией $\varphi = \varphi(x, y)$, которая удовлетворяет (7.2).

Мы можем мысленно провести на интегральной поверхности различные кривые, каждая из которых будет иметь соответствующую проекцию в x, y плоскости. Небольшой шаг вдоль одной из этих проекций кривых в данной точке определяет соответствующую величину $d\varphi_x$ и $d\varphi_y$ согласно вышеприведенным уравнениям.

Определение характеристик. Теперь мы зададим себе вопрос: возможно ли, что на некоторых кривых, лежащих на интегральной поверхности, производные от φ_x и φ_y (то есть производные от компонентов скорости и, следовательно, от всех свойств жидкости) могут претерпевать разрыв? Такие кривые, если они существуют, называются *характеристическими кривыми* решения и их проекции на x, y - плоскость называют *физическими характеристиками*.

Уравнение (7.2) удовлетворяется в любой точке интегральной поверхности. Более того, уравнение (7.3) и (7.4) применимы к приращениям, соответствующим бесконечно малой длине любой кривой, лежащей на этой поверхности. Так как нас интересуют воз-

возможные неопределенности в производных φ_{xx} , φ_{yy} и φ_{xy} , запишем все три эти уравнения в следующем порядке

$$\left. \begin{aligned} A\varphi_{xx} + 2B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} &= D \\ dx\varphi_{xx} + dy\varphi_{xy} &= d\varphi_x \\ dx\varphi_{xy} + dy\varphi_{yy} &= d\varphi_y \end{aligned} \right\}.$$

Эти уравнения можно рассматривать как систему линейных, алгебраических уравнений с переменными φ_{xx} , φ_{yy} и φ_{xy} . Решая для φ_{xy} мы получаем, используя определитель системы

$$\varphi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} A & D & C \\ dx & d\varphi_x & 0 \\ 0 & d\varphi_y & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{A dy d\varphi_x - D dy dx + C dx d\varphi_y}{A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2}. \quad (7.5)$$

В любой точке (x, y, φ) на интегральной поверхности величины φ_x и φ_y известны из очертаний поверхности. Соответственно коэффициенты A , B , C и D известны во всех точках поверхности. В общем случае, значение φ_{xy} (и, следуя подобным рассуждениям, значения φ_{xx} и φ_{yy}) определены уравнением (7.5), за исключением, когда и числитель и знаменатель (7.5) равны нулю. Последнее условие даёт ответ на наш вопрос: в случае, когда φ_{xy} , φ_{xx} и φ_{yy} не определены, они могут иметь разрыв.

Кривые физических характеристик. Положив знаменатель (7.5) равным нулю, мы получим дифференциальное уравнение

проекций характеристических кривых в физической плоскости, а именно

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0. \quad (7.6)$$

Решая это квадратичное уравнение, мы получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (7.7)$$

Годограф физических кривых. Посредством уравнения (7.7) наклоны характеристик в физической плоскости могут быть определены. Однако, коэффициенты A , B и C , в зависимости от которых наклоны (dy/dx) определяются, зависят в частности от φ_x и φ_y . Для того, чтобы построить характеристики в физической плоскости необходимо определить как φ_x и φ_y изменяются вдоль характеристик. Это наиболее легко сделать, найдя уравнение характеристик в φ_x, φ_y - плоскости.

Так как φ_{xy} в общем конечно, необходимо, чтобы также как и знаменатель уравнения (7.5), числитель этого уравнения стремился к нулю. Следовательно, мы запишем

$$Ad\varphi_x dy + Cd\varphi_y dx = Ddx dy.$$

Решая относительно $d\varphi_y/d\varphi_x$, мы получаем

$$\left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x}\right) = -\frac{A}{C} \frac{dy}{dx} + \frac{D}{C} \frac{dy}{d\varphi_x}.$$

Подставляя сюда значение уравнения (7.7), получаем

$$\left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x}\right) = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\varphi_x}\right). \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) даёт наклон характеристик в φ_x, φ_y - плоскости в функции φ_x, φ_y, x и y . Вспомним, что уравнение (7.7) даёт наклон характеристик в x, y - плоскости также в функции φ_x, φ_y, x и y . Следовательно, исходя из начальных данных характеристические кривые в физической плоскости и в плоскости годографа могут быть построены и получены численно или графически конечными разностями. Так как интересующие нас физические свойства потока (такие, как давление, скорость и т.д.) могут быть определены по значениям φ_x и φ_y в каждой точке, то задача считается решённой.

Классификация дифференциальных уравнений. Исследование уравнений (7.7) и (7.8) показывает, что дифференциальное уравнение (7.2) может быть трёх типов, зависящих от знака $(B^2 - AC)$. Эти типы определяются следующим образом.

Гиперболический тип. Значение $(B^2 - AC)$ положительное, так что уравнения (7.7) и (7.8) каждое имеет по два действительных корня. Две характеристические кривые проходят через каждую точку физической плоскости и плоскости годографа.

Параболический тип. Значение $(B^2 - AC)$ равно нулю, так что имеется один действительный корень у уравнений (7.7) и (7.8). Этот тип не имеет большого практического значения.

Эллиптический тип. Значение $(B^2 - AC)$ отрицательное, так что уравнения (7.7) и (7.8) не имеют действительных корней и характеристические кривые являются мнимыми.

Вычислим значение $(B^2 - AC)$:

$$A = 1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} = 1 - \frac{u^2}{a^2}, \quad B = -\frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} = -\frac{uv}{a^2}, \quad C = 1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} = 1 - \frac{v^2}{a^2},$$

$$\begin{aligned}
B^2 - AC &= \frac{u^2 v^2}{a^4} - 1 + \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2 v^2}{a^4} = \\
&= \frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1.
\end{aligned}$$

Таким образом мы можем сказать:

- (i) в случае *стационарного* течения дифференциальное уравнение (7.2) будет гиперболическим для сверхзвукового потока и эллиптическим для дозвукового потока;
- (ii) в случае *нестационарного* течения это дифференциальное уравнение всегда гиперболическое.

Следовательно, реальные характеристики всегда существуют для нестационарного движения, но для стационарного течения существуют только когда поток сверхзвуковой.

Итак, характеристические кривые имеют специальные свойства, а именно:

- (i) действительные характеристические кривые существуют для сверхзвукового, но не для дозвукового потока;
- (ii) характеристические кривые удовлетворяют дифференциальное уравнение (7.1) и следовательно могут представлять решение этого дифференциального уравнения;
- (iii) на характеристических кривых могут быть разрывы в *производных* от свойств жидкости.

Характеристические кривые описываются обычными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_I = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{II} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x} \right)_I &= -\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\varphi_x} \right)_I, \\ \left(\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x} \right)_{II} &= -\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{C} + \frac{D}{C} \left(\frac{dy}{d\varphi_x} \right)_{II}. \end{aligned} \right\}. \quad (7.10)$$

Подставляя в (7.9) и (7.10) значения коэффициентов

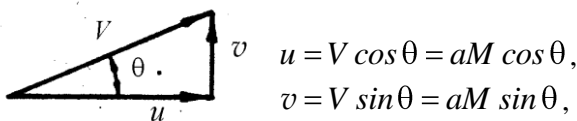
$$A = 1 - \frac{u^2}{a^2}, \quad B = -\frac{uv}{a^2}, \quad C = 1 - \frac{v^2}{a^2}, \quad D = 0,$$

мы получаем уравнения характеристических кривых для двухмерного сверхзвукового потока:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{I,II} = \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}}, \quad (7.11)$$

$$\left(\frac{dv}{du} \right)_{I,II} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}. \quad (7.12)$$

Покажем теперь, что физические характеристики наклонены под местным углом Маха к местному вектору скорости. Используя полярные координаты V и θ для плоскости годографа, мы имеем



$$\frac{uv}{a^2} = M^2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \alpha}, \quad M = \frac{V}{a} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\sqrt{M^2 - 1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставляя в уравнение (7.11), мы получаем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\alpha} \pm \frac{1}{tg\alpha}}{1 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\alpha}}.$$

Несколько преобразовав и упростив с помощью тригонометрических функций, имеем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I = tg\ \theta - \alpha \ ; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = tg\ \theta + \alpha \ . \quad (7.13)$$

Отсюда мы видим, что каждая из двух физических характеристик наклонена под углом Маха к вектору скорости и что направление линии тока в точке физической плоскости служит биссектрисой угла, образованного направлениями характеристик в этой точке. То есть, мы видим, что физические характеристики тождественны с линиями Маха потока. К этому же результату можно прийти значительно проще, разместив параллельно оси x вектор скорости в данной точке поля потока. Тогда в этой точке мы будем иметь $u = V$, $v = 0$, $M = V/a$ и $\theta = 0$, а уравнение (7.11) становится

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{I,II} = \frac{\pm\sqrt{\frac{V^2}{a^2}-1}}{1-\frac{V^2}{a^2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = \mp tg\alpha \ .$$

Так как вектор скорости совпадает с осью x , мы делаем вывод, что физические характеристики I семейства откладываются под углом Маха вниз от вектора скорости, а II семейства – вверх.

Алгебраическим упрощением, используя уравнения (7.11) и (7.12), можно показать, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_I \left(\frac{dv}{du}\right)_{II} = -1; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} \left(\frac{dv}{du}\right)_I = -1, \quad (7.14)$$

что означает, что физическая характеристика одного семейства перпендикулярна к характеристике в плоскости годографа противоположного семейства (рис. 7.1).

Уравнение (7.11) показывает, что дифференциальное уравнение физических характеристик содержит составляющие скорости и поэтому должно быть решено одновременно с дифференциальным уравнением характеристик в плоскости годографа. В противоположность этому, однако, дифференциальное уравнение (7.12) характеристик в плоскости годографа содержит только компоненты скорости и может быть, следовательно, проинтегрировано не зависимо от физической задачи и даёт универсальные характеристики в плоскости годографа, которые не зависят от картины течения в физической плоскости.

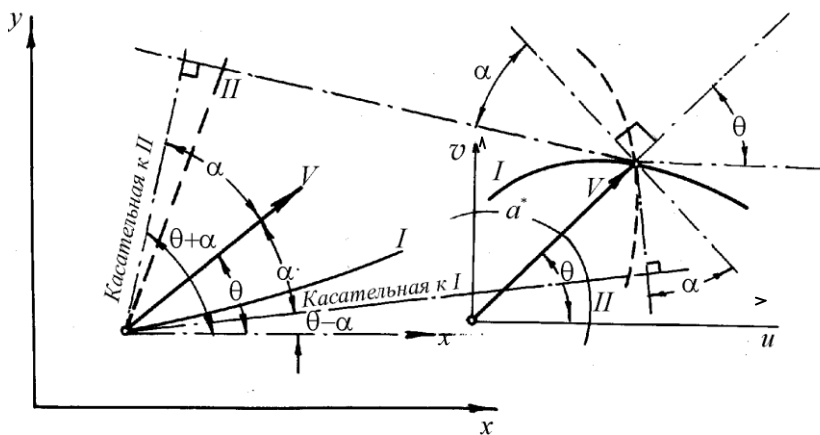
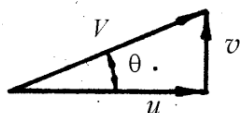


Рис. 7.1 – Характеристики в физической плоскости и плоскости годографа

Чтобы получить универсальное выражение характеристик в плоскости годографа, удобно применить полярные координаты V и θ



$$u = V \cos \theta,$$

$$v = V \sin \theta.$$

Подставляя эти выражения для u и v в уравнение (7.12), после алгебраических преобразований получаем

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta} \right)_{I,II} = \mp \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \mp \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.15)$$

Более простой метод получения (7.15) может быть при помощи правила, которое утверждает, что перпендикуляр к I-характеристике годографа лежит под углом $+\alpha$ вектора скорости, в то время как для II-характеристики – под углом $-\alpha$. Применяя это правило к графическому построению рис. 7.2, уравнение (7.15) становится немедленно очевидным.

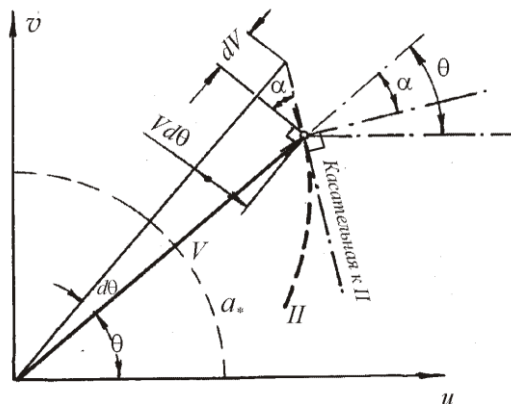


Рис. 7.2 – Геометрическое толкование дифференциального уравнения характеристик в плоскости годографа

Вышеприведенный метод характеристик был получен, основываясь на формальных математических методах. К аналогичному результату можно прийти другим путём: расширив теорию линей-

ризации; в этом случае на первый план выступает физическая сущность проблемы.

Представим, что волна Маха семейства II (рис. 7.3) поворачивает поток, который обтекает положительный угол $d\theta$ с соответствующим бесконечно малым изменением во всех свойствах потока.

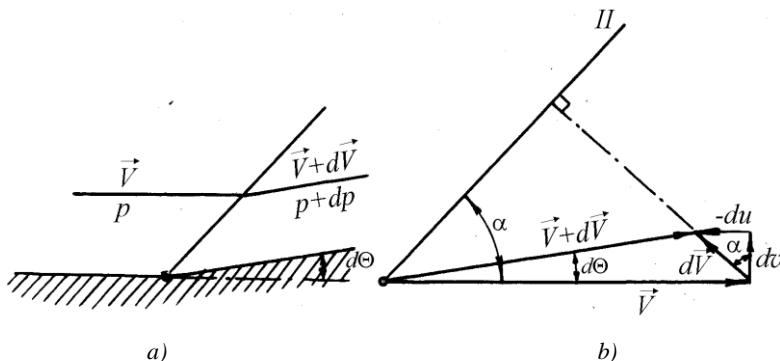


Рис. 7.3 – К определению дифференциального уравнения характеристики первого семейства путём развития теории линейаризации:

a) – физическая плоскость; б) – плоскость годографа

Диаграмма в плоскости годографа построена, исходя из правила, что *вектор* изменения скорости, вызванный волной, перпендикулярен к направлению волны. Из геометрии рисунка, замечая, что du в пределе является *алгебраическим* изменением в скорости dV , мы получаем

$$dv = Vd\theta, \quad du = dV, \quad -\frac{du}{dv} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta}.$$

То есть мы имеем

$$\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{d\theta} \right) = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta}; \quad d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (7.16)$$

Это уравнение является точной копией уравнения (7.15) применительно к характеристикам годографа I семейства. Используя адиабатические соотношения (3.2) и (3.20), мы можем записать

$$V^2 = a^2 M^2 = kRTM^2, \quad 2 \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} + \frac{dM^2}{M^2},$$

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad 0 = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{k-1}{2} dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}.$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\frac{2dV}{V} = \frac{-\frac{k-1}{2} dM^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} + \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dM^2}{M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}.$$

Или окончательно

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM^2}{2M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}.$$

Следовательно, уравнение (7.16) можно записать

$$d\theta = - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{2M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)} dM^2. \quad (7.17)$$

Интегрирование этого уравнения стандартными методами даёт

$$\theta = -\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k-1}{k+1} M^2 - 1} + \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1} + \operatorname{const}. \quad (7.18)$$

Очень часто более удобно оперировать с безразмерным коэффициентом $\lambda = \frac{V}{a_*}$, чем с числом Маха M . Вспомним, что согласно уравнению (3.19) число Маха M выражается через безразмерный коэффициент скорости λ соотношением

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}.$$

Тогда уравнение (7.18) может быть записано в форме

$$\theta_I = -\omega \lambda + 2I - 1000, \quad (7.19)$$

где функция $\omega \lambda$ определяется выражением

$$\omega \lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \lambda^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}, \quad (7.20)$$

а $(2I - 1000)$ – постоянная интегрирования.

Постоянная интегрирования $(2I - 1000)$ в уравнении (7.19) определяется из начальных величин θ и λ для любой частной задачи.

Из уравнения (3.18) следует (стр. 65), что при $M = \infty$

$\lambda_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = 2,45$. Подставляя это значение λ_{max} в формулу (7.20), получаем

$$\begin{aligned} \omega \lambda_{max} &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{\frac{k+1}{k-1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{k+1}{k-1}}} - \arctg \sqrt{\frac{\frac{k+1}{k-1} - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{k+1}{k-1}}} = \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \cdot 90^\circ - 90^\circ = 2,45 - 1 \cdot 90^\circ = 1,45 \cdot 90^\circ = 130,5^\circ. \end{aligned}$$

Если бы мы имели дело с задачей, у которой были бы только волны Маха I семейства, то знак справа в уравнении (7.16) изменился бы на противоположный и в конечном счёте имели бы

$$\theta_{II} = +\omega \lambda + 2II - 1000 . \quad (7.21)$$

Для ускорения численных расчётов соотношения между M , λ и ω протабулированы для различных k (таблица 2 в приложении).

Характеристики в плоскости годографа. Если все скорости разделить на a_* , то диаграмма годографа становится безразмерной с полярными координатами λ и θ . Затем, если уравнения (7.19) и (7.21) построить в плоскости годографа, мы получим семейства двух кривых (рис. 7.4). Кривые, обозначенные I, описываются уравнением (7.19), аналогично, кривые семейства II описываются уравнением (7.21). Очевидно, что два семейства кривых являются зеркальным отображением один другого и кривая данного семейства может быть определена из кривой второго семейства простым вращением вокруг оси. Линии Маха в данной точке физической плоскости являются нормальными к характеристике годографа.

$$\left. \begin{aligned} \theta_I &= -\omega + 2I - 1000 \\ \theta_{II} &= \omega + 2II - 1000 \end{aligned} \right\}.$$

Складывая и вычитая эти два уравнения, получаем

$$\theta_I + \theta_{II} = 2 I + II - 2000, \quad \theta_I - \theta_{II} = -2\omega + 2 I - II .$$

При $\theta_I = \theta_{II} = \theta$ имеем

$$\theta = I + II - 1000; \quad \omega = I - II . \quad (7.22)$$

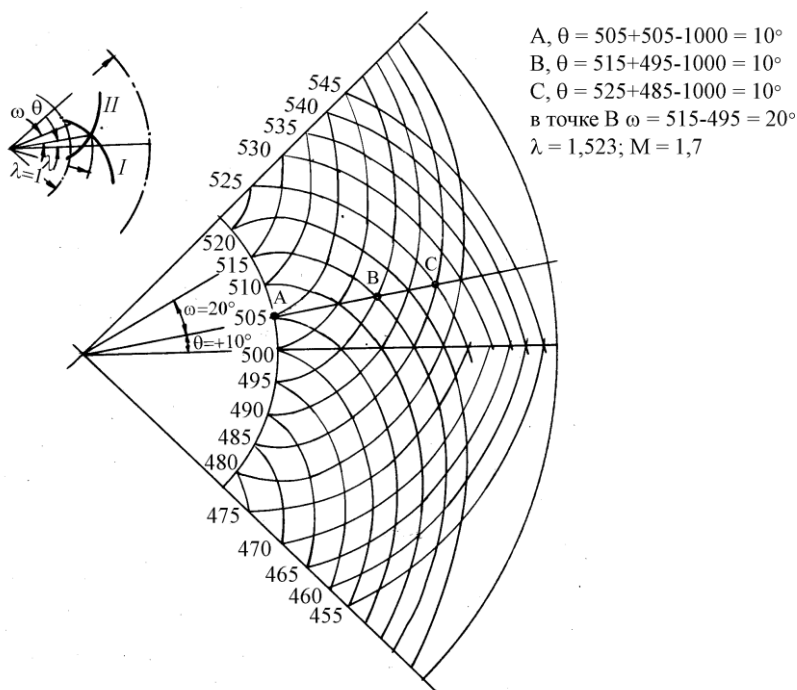


Рис. 7.4 – Характеристические кривые в плоскости годографа

Для идеального газа можно показать, что характеристическая кривая в плоскости годографа $\lambda - \theta$ является эписциклоидой, образованной точкой окружности радиуса $\frac{1}{2} \left[\sqrt{k+1 / k-1} - 1 \right]$, катящейся без скольжения по другой окружности радиуса равным единице.

7.2 Течение Прандтля-Майера. Использование характеристик годографа. Единичные процессы.

Течение Прандтля-Майера. Специальным, но важным случаем потока с простыми волнами является такой поток, в котором

линии тока имеют такое очертание, что все линии Маха проходят через общую точку O (рис. 7.5а).

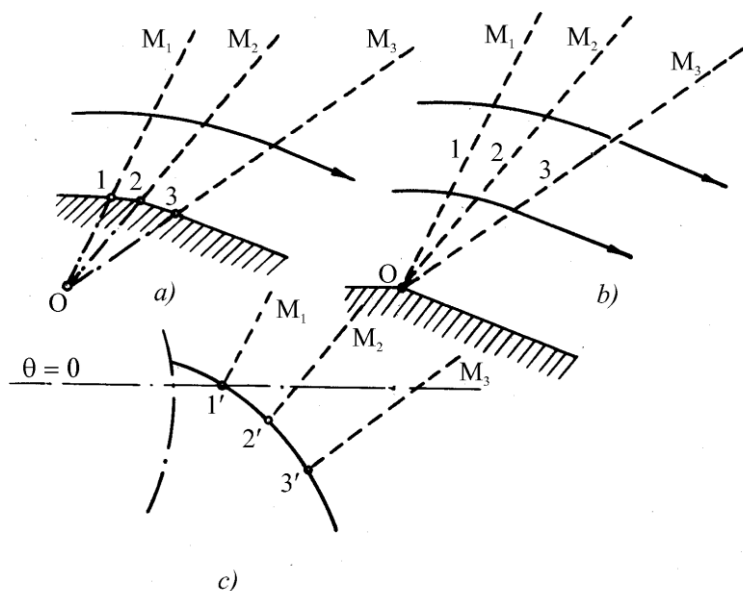


Рис. 7.5 – Центрированные простые волны

На рис. 7.5b изображён специальный случай этого специального течения, имеющий даже более важное практическое значение, в котором граничная линия тока проходит через центр O . Этот поток с *центральными простыми волнами* и называется *обтеканием угла* или *течением Прандтля-Майера*. Такое течение характеризуется следующими правилами:

- (i) все свойства являются однородными на прямых лучах, исходящих из угла, и
- (ii) эти лучи составляют угол Маха с местным направлением потока.

Законченным потоком с простыми волнами является такой поток, обтекающий угол, в котором число Маха изменяется от единицы до бесконечности.

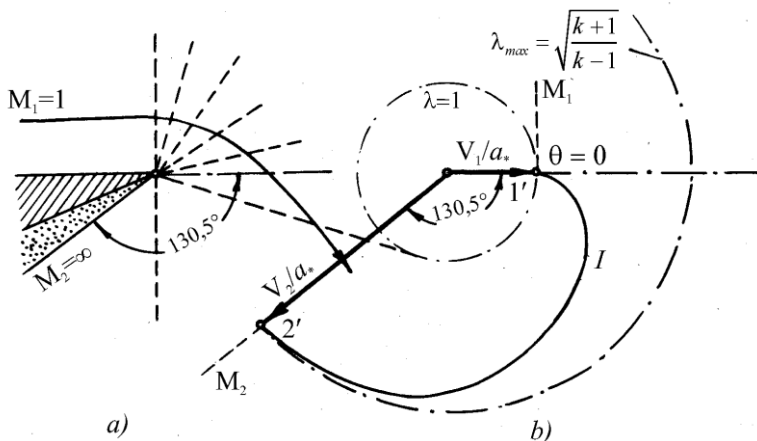
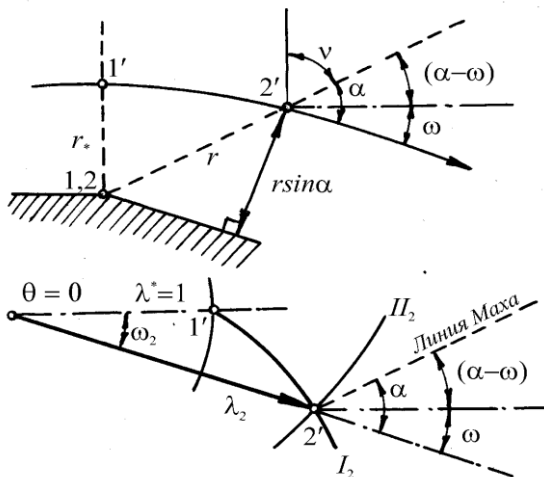


Рис. 7.6 – Завершенный поток с простыми волнами

На рис. 7.6b показан годограф течения, физическая картина которого и линия тока показана на рис. 7.6a. Из уравнения (7.20) для $k=1,4$, $\omega=130,5^\circ$ при λ_{max} . Из уравнения (7.18) следует, что максимально возможный угол поворота потока также равен $130,5^\circ$. С поворотом вокруг угла поток будет расширяться до нулевого давления и температуры. Так как $\alpha_1 = 90^\circ$ и $\alpha_2 = 0$ касательная к характеристике в плоскости годографа идёт вдоль радиуса при $\lambda=1$ и перпендикулярна к радиусу при λ_{max} (рис. 7.6b).

Какова будет картина течения, когда поток при $M = 1$ приближается к углу поворота более чем $130,5^\circ$, как показано на рис. 7.6a. Когда поток расширится до нулевого давления, он повернётся на угол $130,5^\circ$. За этим углом будет зона кавитации, смежная к стенке. Однако это не будет точно так, так как при очень низких тем-

Описание линии тока при течении Прандтля-Майера легко получается из рассмотрения следующей картины течения. Расстояние r_* пропорционально минимальной площади поперечного сечения для изоэнтропийного потока, а расстояние $r \cdot \sin \alpha$ пропорционально площади поперечного сечения в любом другом сечении.

$$\frac{r \cdot \sin \alpha}{r_*} = \frac{A}{A_*} \quad \text{или} \quad \frac{r}{r_*} = M \frac{A}{A_*}.$$


По формуле приведенного секундного расхода (3.28), полученной для изэнтропийного течения, мы имеем

$$q = \frac{A_*}{A} = M \left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1}},$$

откуда получаем

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M} \sqrt[\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}]{ },$$

или окончательно имеем

$$\frac{r}{r_*} = \sqrt[\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}]{ }. \quad (7.23)$$

По этой формуле можно построить линии тока в течении Прандтля-Майера с r и $(\alpha - \omega)$ полярными координатами.

Использование характеристик годографа существенно упрощает расчёты сверхзвуковых течений (при этом используются кривые характеристик годографа на рис. 7.4). Из предыдущего изложения мы получаем следующие правила для использования диаграммы характеристик.

(i) Когда линия тока *пересекает* волну Маха семейства II, годограф линии тока (то есть точка в плоскости годографа, представляющая конечную точку вектора скорости) движется вдоль характеристик годографа семейства I. Линия Маха является перпендикуляром к характеристике годографа семейства I и лежит под углом $\theta + \alpha$ к горизонтальной линии.

(ii) Когда линия тока *пересекает* волну Маха семейства I, годограф линии тока движется вдоль характеристики годографа семейства II. Линия Маха является перпендикуляром к характеристике годографа семейства II и лежит под углом $\theta - \alpha$ к горизонтали.

Для данной точки в плоскости годографа уравнения (7.19) и (7.21) можно записать

$$\left. \begin{aligned} 1000 + \omega + \theta &= 2I \\ 1000 - \omega + \theta &= 2II \end{aligned} \right\}. \quad (7.24)$$

Суммируя, а затем, вычитая эту пару уравнений, мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \theta &= I + II - 1000 \\ \omega &= I - II \end{aligned} \right\}. \quad (7.25)$$

Эти уравнения нами ранее записаны под номером (7.22).

Имея θ и ω , можно определить I и II по уравнениям (7.24). Наоборот, зная I и II , мы можем определить θ и ω из уравнений (7.25).

Последние соотношения также показывают, что в плоскости годографа радиальные линии (линии постоянного направления потока, выходящие из центра, являются линиями постоянного значения $(I + II)$, в то время как concentрические окружности (окружность постоянной скорости и давления) являются линиями постоянного значения $(I - II)$.

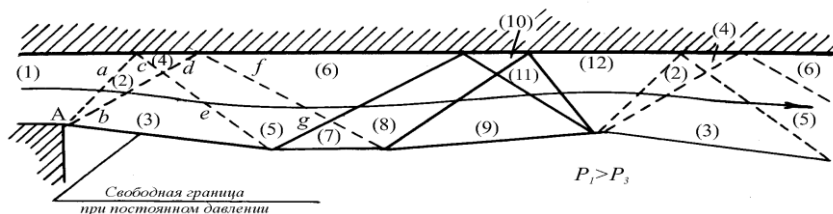
Пример расчёта. Последовательность расчёта лучше всего может быть рассказана при помощи специфического примера.

Пусть на выходе сопла в поле (1) мы имеем $M_1 = 1,435$, $\theta_1 = 0$ и $p_1 = 5$ бар. Давление окружающей среды равно 3,0205 бар. По таблицам параметров изоэнтропического потока воздуха в функции характеристических чисел (таблица 2 в приложении) мы имеем $\omega_1 = 10^\circ$, $p_1/p_0 = 0,299$. Из уравнений (7.24) мы определяем $I_1 = 505$ и $II_1 = 495$.

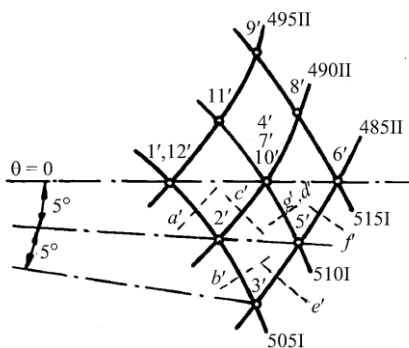
На границе струи давление везде должно быть 3,205 бар. Внезапное падение давления на угле A от 5 бар до 3,205 происходит при расширении вокруг угловой точки. Если (3) состояние после расширения, то

$$p_3/p_0 = p_1/p_0 \quad p_3/p_1 = 0,299 \cdot 3,205/5 = 0,299 \cdot 0,604 = 0,1808.$$

Следовательно, из таблицы 2 мы получаем $\omega_3 = 20^\circ$. Затем, так как состояния (1) и (3) лежат на общей I-характеристике, мы имеем $I_3 = I_1 = 505$. Уравнения (7.25) затем дают $\theta_3 = -10^\circ$ и $\Pi_3 = 485$. Мы определили, что струя (вернее граница струи) отклоняется на 10° от направления в сопле.



a)



b)

Рис. 7.8 – Течение на выходе из сопла в пространство с пониженным давлением (недорасширенное сопло):

a) – картина течения в физической плоскости. Пунктиром в волновой схеме показаны волны разрежения, сплошной линией – волны сжатия;

b) – картина течения в плоскости годографа.

Заменяем действительное Прандтль-Майеровское течение (которое является непрерывным) конечным числом волн Маха, изменяющих ступенчато состояние газа. Для удобства иллюстрации мы берём две отдельные волны a и b для углового течения. Допуская равные углы поворота потока при прохождении через каждую волну, мы имеем

$$\theta_2 = \frac{\theta_3}{2} = -5^\circ, \quad I_2 = I_1 = 505.$$

Затем по уравнениям (7.25) получаем

$$II_2 = 490, \quad \omega_2 = 15.$$

Точки $1'$, $2'$ и $3'$ обозначены на диаграмме годографа (рис. 7.8b). Волна a проводится по направлению a' , то есть перпендикулярно к характеристике годографа семейства I при средних условиях между полями (1) и (2). Аналогично волна b проводится в направлении b' , перпендикулярно к характеристике годографа семейства I при средних условиях между полями (2) и (3).

Когда волна a ударяется о верхнюю стенку, она должна отразиться в виде волны c для того, чтобы направление потока совпадало с верхней стенкой. Если область вниз по потоку от волны c обозначить полем (4), мы будем иметь $\theta_4 = 0$, $II_4 = II_2 = 490$ и согласно (7.25) $I_4 = 510$, $\omega_4 = 20$.

Волну c теперь проводим в направлении c' перпендикулярно к характеристике годографа семейства II при средних условиях между полями (2) и (4).

Теперь представим, что волна d является продолжением волны b и что волна e является продолжением волны c и что они ограничивают поле (5). Но поле (5) достигается из поля (4) вдоль характеристики семейства I и достигается из поля (3) вдоль характеристики семейства II. Следовательно, $I_5 = I_4 = 510$ и $II_5 = II_3 = 485$ и согласно (7.25) $\omega_5 = 25$, $\theta_5 = -5^\circ$.

Волны e и d теперь проводим в соответствии с направлениями e' и d' .

Что случится, когда волна e ударяется о свободную границу струи? Так как поле (5) имеет давление ниже, чем окружающая среда на выходе, волна e должна отразиться в виде волны g , чтобы сохранить граничное условие постоянного давления. Если поле за волной g обозначим через (7), мы будем иметь $\omega_7 = \omega_3 = 20$, $I_7 = I_5 = 510$ и согласно (7.25) $II_7 = 490$, $\theta_7 = 0$.

Волна g может быть теперь начерчена в направлении g' , которое совпадает с направлением d' . Нижняя часть поля (7) является границей струи, которая проводится как линия тока в направлении $\theta_7 = 0$.

Оставшаяся часть картины течения может быть построена аналогично вышеприведенным решениям. Если линия тока пересекает волну разрежения, давление уменьшается в направлении течения. Обратную картину мы наблюдаем для волны сжатия. На рис. 7.8а волны разрежения показаны прерывистыми линиями, а волны сжатия – сплошными. Различные линии тока могут быть также проведены, исходя из известного направления потока в каждом поле, а распределение давления – по известным числам Маха в каждом поле.

Значение параметров в каждом поле объединено в таблице 7.2. Для каждого поля два из четырёх параметров I , Π , ω и θ подчёркнуты и выделены жирным шрифтом, указывая на те два параметра в данном поле, которые определяются первыми. Оставшиеся два параметра определяются с помощью уравнений (7.25) или графически по рис. 7.8b.

Таблица 7.1 к рис. 7.8а

Волна	Перед ($\theta+\alpha$)	За ($\theta+\alpha$)	Среднее ($\theta+\alpha$)	Перед ($\theta-\alpha$)	За ($\theta-\alpha$)	Среднее ($\theta-\alpha$)
<i>a</i>	44,2	33,6	38,9			
<i>b</i>	33,6	24,3	29,0			
<i>c</i>				-43,6	-34,3	-39,0
<i>d</i>	34,3	25,8	30,0			
<i>e</i>				-44,3	-35,8	-40,0
<i>f</i>				-35,8	-28,0	-31,9
<i>g</i>	25,8	34,3	30,0			
6-8	28,0	35,8	31,9			
7-8				-34,3	-25,8	-30,0
8-9	35,8	44,3	40,0			
9-10				-25,8	-34,3	-30,0
10-11	34,3	43,6	39,0			
9-11				-24,3	-33,6	-29,0
11-12				-33,6	-44,2	-38,9

Таблица 7.2 к рис. 7.8b

Поле	I	II	ω	θ	α	$\theta+\alpha$	$\theta-\alpha$	p/p_0
1	505	495	<u>10°</u>	<u>0°</u>	44,18°	44,2°	-44,2°	0,299
2	<u>505</u>	490	15	<u>-5</u>	38,55	33,6	-43,6	0,2334
3	<u>505</u>	485	<u>20</u>	-10	34,29	24,3	-44,3	0,1808
4	510	<u>490</u>	20	<u>0</u>	34,29	34,3	-34,3	0,1808
5	<u>510</u>	<u>485</u>	25	-5	30,85	25,8	-35,8	0,1381
6	515	<u>485</u>	30	<u>0</u>	27,95	28,0	-28,0	0,1037
7	<u>510</u>	490	<u>20</u>	0	34,29	34,3	-34,3	0,1808
8	<u>515</u>	<u>490</u>	25	5	30,85	35,8	-25,8	0,1381
9	<u>515</u>	495	<u>20</u>	10	34,29	44,3	-24,3	0,1808
10	510	<u>490</u>	20	<u>0</u>	34,29	34,3	-34,3	0,1808
11	<u>510</u>	<u>495</u>	15	5	38,55	43,6	-33,6	0,2334
12	505	<u>495</u>	10	<u>0</u>	44,18	44,2	-44,2	0,299

Таблица также даёт в каждом поле направление $(\theta+\alpha)$ для волн левого направления и $(\theta-\alpha)$ для волн правого направления. Эти значения собраны в таблице 7.1, давая угол наклона для каждой волны. С помощью такой таблицы направление волн Маха могут быть определены без графических манипуляций в плоскости годографа.

Единичные процессы. Все возможные картины течения могут быть составлены из соответствующих волновых схем. Волновые схемы в свою очередь строятся повторным применением относительно небольших операций, названных *единичными процессами*. Они следующие.

Генерация (возникновение) волны. Это имеет место, когда твердая граница потока является криволинейной (рис. 7.5a) или когда струя вытекает в пространство с переменным давлением, как на угле сопла (рис. 7.8a). Из рассуждений о количестве движения мы получаем общее правило, что *при пересечении волны разрежения*

линия тока отклоняется прочь от волны; при пересечении волны сжатия поток отклоняется в сторону волны.

Отражение волны от плоской границы. Это проиллюстрировано на рис. 7.8а волной a , которая отражается в виде волны c для того, чтобы сохранить заданное направление потока у стенки. Мы видим, что отражённая волна c , как и волна a , является волной расширения и, следовательно, мы пришли к основному правилу, что *отражённая волна от твёрдой границы является одинаковой по природе с падающей волной*.

Отражение волны от свободной границы. Проиллюстрировано на рис. 7.8а волной e , которая отражается в виде волны g , для того, чтобы сохранить заданное давление на границе струи. Так как волна e является волной разрежения, а волна g – волной сжатия, мы приходим к правилу, что *отражённая волна от границы постоянного давления является противоположной по природе с падающей волной*.

Погашение волны. Используется при проектировании сверхзвуковых сопел, если необходимо избежать отражения волн, попадающих на стенку границы.

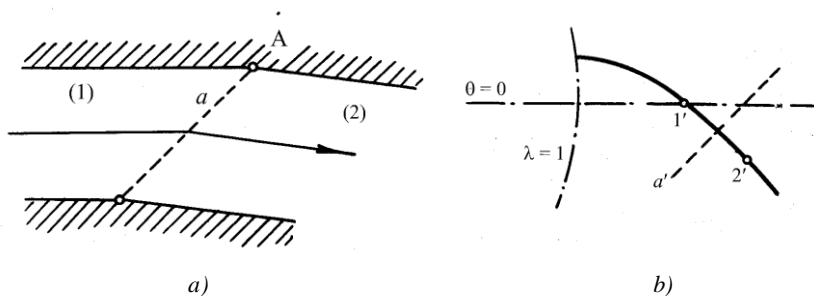


Рис. 7.9 – Погашение волны путём соответствующего искривления стенки

Это достигается очерчиванием границы таким образом, что необходимость в отражении, чтобы сохранить условие неразрывности у стенки, отпадает. Это легко достичь, если в точке A , куда падает волна a , стенку изогнуть так, чтобы она имела то же направление, что и поток в поле (2).

Посмотрим с другой точки зрения: если верхняя стенка была бы прямой, волна a (являющаяся волной разрежения) отразилась бы как волна разрежения. Изгибая стенку в A , однако, на угол, равный углу поворота при пересечении a , волна сжатия должна возникнуть в точке A . Эта волна сжатия гасит волну расширения, которая является отражённой волной a .

Пересечение волн. Это проиллюстрировано волнами b и c на рис. 7.8а пересекающимися и далее продолжающимися волнами d и e соответственно. *То есть при пересечении волны не меняют свою природу.*

7.3 Примеры применения метода характеристик

Тонкий профиль. В любой точке профиля местное давление зависит от местного наклона поверхности и от того, где находится точка – на верхней или на нижней стороне профиля. Заметим, что волны сжатия возникают на нижней поверхности профиля, которая является вогнутой. Как мы покажем далее, они окончательно образуют наклонный скачок уплотнения в месте пересечения.

Когда профиль имеет толщину, наклонные скачки обычно возникают на самом профиле и анализ такого профиля требует комбинированного применения метода характеристик и теории косо́го скачка. Такие профили рассмотрим позже.

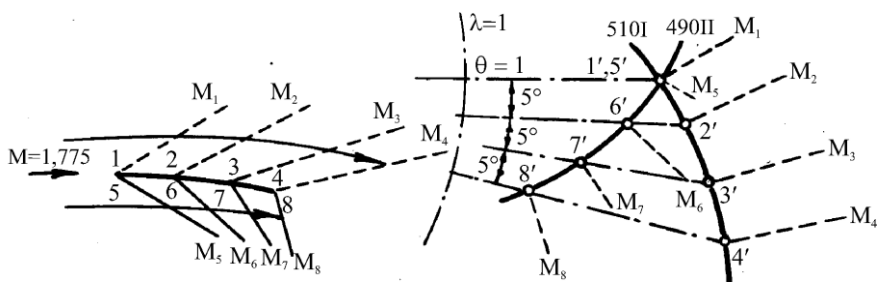


Рис. 7.10 – Обтекание тонкого профиля. Картины течения в физической плоскости и плоскости годографа

Недорасширяющее сопло. Вдоль каждой характеристики скорость меняется непрерывно, но имеет разрыв в первой и выше производной скорости.

Картина течения (рис. 7.11) повторяющаяся, так как поле (5) идентично с полем (1). Фотографии, полученные методом шпир, прекрасно подтверждают теоретически построенную картину течения с экспериментом, за исключением того, что в результате трения между струёй и окружающей средой аналитическое решение нарушается после одного или двух циклов.

Сверхзвуковая активная турбинная лопатка. Если поток относительно лопатки сверхзвуковой, тогда форма канала, изображённая на рис. 7.12, является теоретически приемлемой. Очертание кривых $D'E$, AB и FG' и BC получаем по уравнению (7.23) – Прандтль-Майеровское течение вокруг точек O' и O соответственно.

Одним из важнейших практических применений метода характеристик является построение сверхзвуковых сопел двухмерного потока.

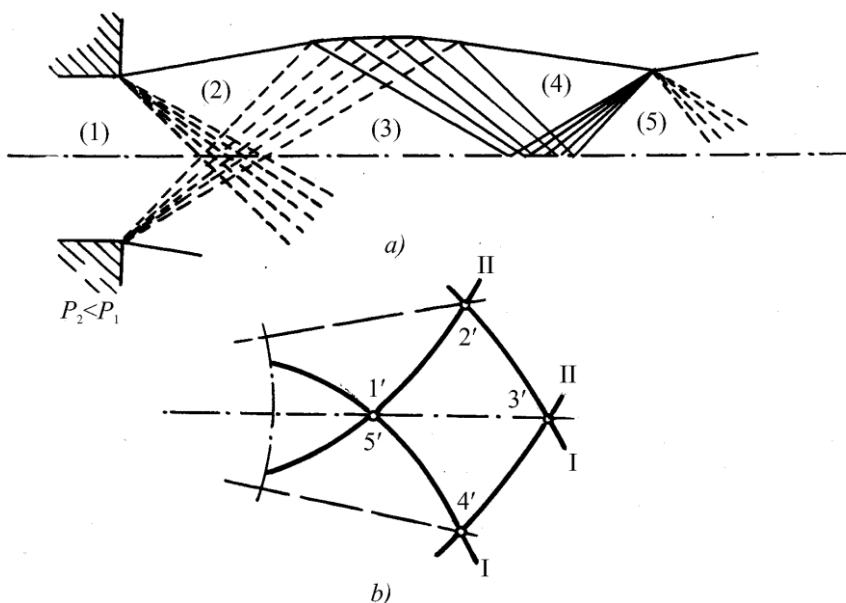


Рис. 7.11 – Истечение из сопла в пространство с пониженным давлением (волновая схема в физической плоскости и картина течения в плоскости годографа).

Конструирование сверхзвукового сопла. Построение волновой картины и контура стены для сопла с резко раскрывающимися направляющими (излом направляющих стенок сопла в горле) с использованием метода полей графически представлено на рис. 7.13.

Конструкция расширяющегося контура зависит от очертания звуковой линии в горле. Мы в нашем примере принимали, что звуковая линия прямая и перпендикулярная оси.

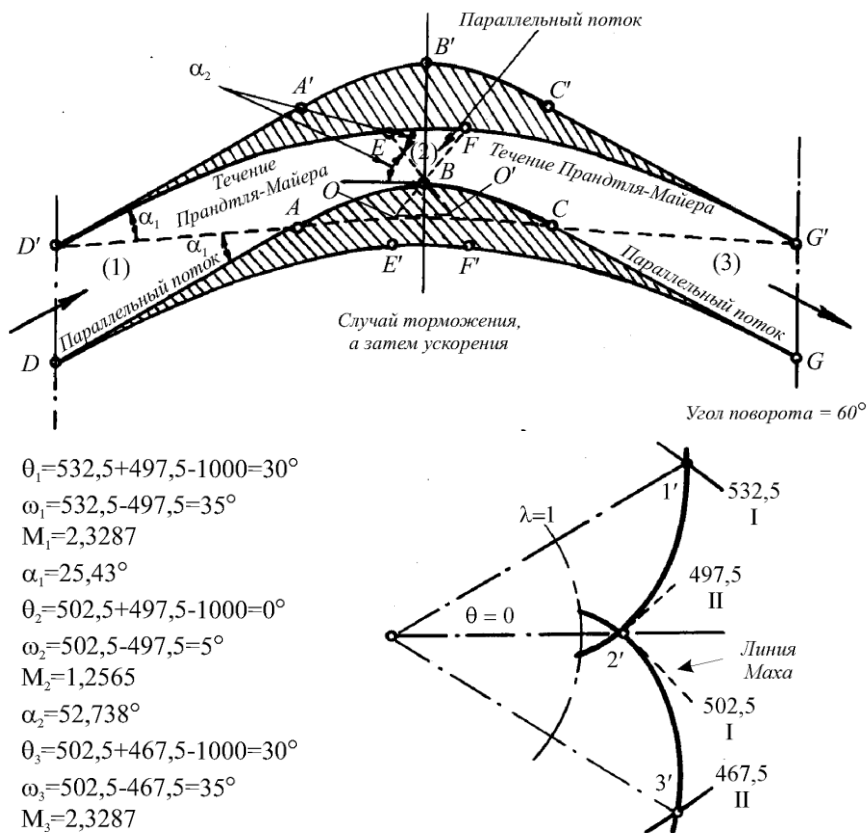


Рис. 7.12 – Конструирование активной сверхзвуковой лопатки (физическая плоскость и плоскость годографа).

Дозвуковой вход. Очертание звуковой линии, от которой начинается построение сверхзвуковой части сопла, зависит от очертания дозвукового входа. Нет теоретических предпосылок, какое очертание звуковой линии является лучшим, но важно знать это очертание. Для этого имеется несколько возможностей.

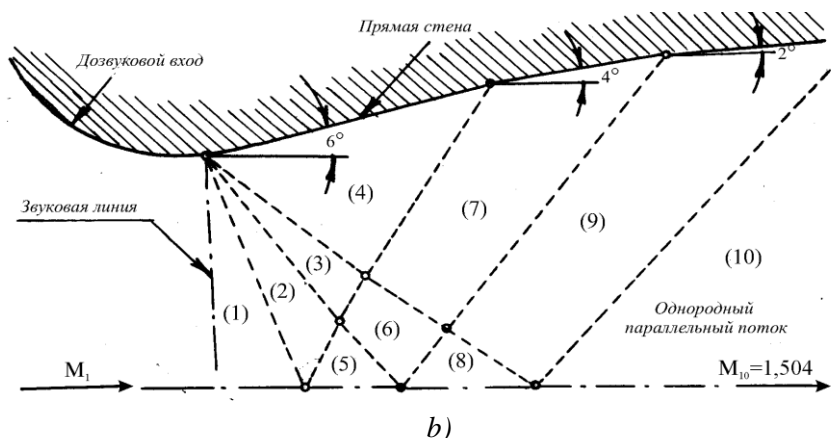
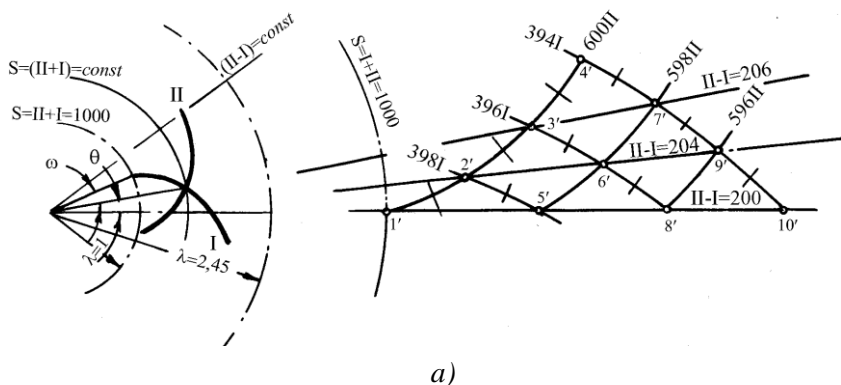


Рис. 7.13 – Построение сверхзвукового сопла

- (i) Подчиняясь ограничению толщины пограничного слоя, дозвуковой вход должен быть по возможности достаточно длинен и иметь такое постепенное искривление, чтобы быть уверенным, что звуковая линия будет точно прямой и перпендикулярной к оси.
- (ii) Для данного очертания входной части сопла контур звуковой линии может быть определён аналитически.

- (iii) Для данного очертания входной части предварительные испытания (возможно на модели) можно провести, чтобы найти звуковую линию.

В любом случае, чтобы избежать отрыва или утолщения пограничного слоя, дозвуковой контур должен быть сконструирован так, чтобы не было местных областей повышения давления.

В отечественной литературе постоянную интегрирования в уравнениях (7.19) и (7.21) выбирают так, чтобы

$$\theta = II - I - 200; \quad \omega = 1000 - I + II; \\ I = 400 - \frac{\theta + \omega}{2}; \quad II = 600 + \frac{\theta - \omega}{2}.$$

Сверхзвуковое сопло с изломом в горле для получения скорости на выходе с числом $M_{10} = 1,504$ показано на рис. 7.13*b*. Плоскость годографа для этого случая показана на рис. 7.13*a*. Результаты расчётов с принятыми в отечественной литературе постоянными интегрирования уравнений (7.19) и (7.21) приведены в таблицах 7.3 и 7.4.

Таблица 7.3 к рис. 7.13*a*

Точка поля	I	II	ω	θ	α	$\theta + \alpha$	$\theta - \alpha$	M
1	400	600	0°	<u>0°</u>	90°	90°	-90°	<u>1</u>
2	398	<u>600</u>	2°	<u>2°</u>	62°	64°	-60°	1,147
3	396	<u>600</u>	4°	<u>4°</u>	55°08'	59°08'	-51°08'	1,262
4	<u>394</u>	<u>600</u>	6°	6°	50°36'	56°36'	-44°36'	1,294
5	<u>398</u>	598	4°	<u>0°</u>	55°08'	55°08'	-55°08'	1,219
6	<u>396</u>	<u>598</u>	6°	2°	50°36'	52°36'	-48°36'	1,294
7	<u>394</u>	<u>598</u>	8°	4°	47°	51°	-43°	1,367
8	<u>396</u>	596	8°	<u>0°</u>	47°	47°	-47°	1,367
9	<u>394</u>	596	10°	2°	44°10'	46°10'	-42°10'	1,435
10	394	594	12°	<u>0°</u>	41°40'	41°40'	-41°40'	<u>1,504</u>

Таблица 7.4 к рис. 7.13b

Волна	Перед ($\theta+\alpha$)	За ($\theta+\alpha$)	Среднее ($\theta+\alpha$)	Перед ($\theta-\alpha$)	За ($\theta-\alpha$)	Среднее ($\theta-\alpha$)
1-2				-90°	-60°	-75°
2-3				-60°	-51°08'	-55°34'
3-4				-51°08'	-44°36'	-47°52'
2-5	64°	55°08'	59°34'			
3-6	59°08'	52°36'	55°52'			
4-7	56°36'	51°	53°48'			
6-8	52°36'	47°	49°48'			
7-9	51°	46°10'	48°35'			
5-6				-55°08'	-48°36'	-51°52'
6-7				-48°36'	-43°	-45°48'
8-9				-47°	-42°10'	-44°35'
9-10	46°10'	41°40'	43°55'			

Итак, в отечественной литературе:

$$\theta_I = -\omega \lambda + 800 - 2I ; \quad \theta_{II} = +\omega \lambda + 2II - 1200 .$$

Принятие различных постоянных интегрирования и приводит к тому, что расчётные формулы при использовании характеристик годографа несколько отличаются в США и у нас.

Отечественная литература	Литература США
$\begin{cases} \theta = II - I - 200 \\ \omega = 1000 - I + II \end{cases}$	$\begin{cases} \theta = I + II - 1000 \\ \omega = I - II \end{cases}$
$\begin{cases} 2I = 800 - \omega - \theta \\ 2II = 1200 - \omega + \theta \end{cases}$	$\begin{cases} 2I = \omega + \theta + 1000 \\ 2II = \theta - \omega + 1000 \end{cases}$

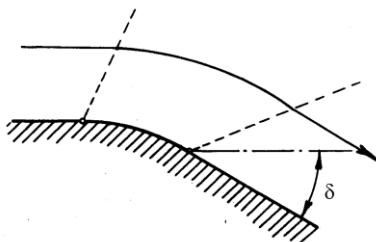
Вопросы для самопроверки

1. Какими свойствами обладают характеристики?
2. Дайте определение течения Прандтля–Майера.
3. Сформулируйте правила для использования диаграммы характеристик.
4. Что такое единичные процессы? Сформулируйте их.

Задачи

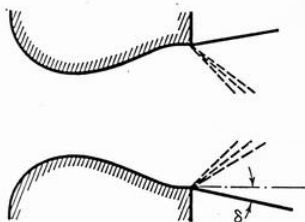
7.1. Рассмотрите расширяющийся поток вокруг искривленной стенки (см. рисунок).

Сравните точную теорию с теорией линеаризации, построив кривую p_2/p_1 от изменения M_1 для двух значений δ , а именно, 2° и 10° . Используйте изменение числа M от 1 до 3.

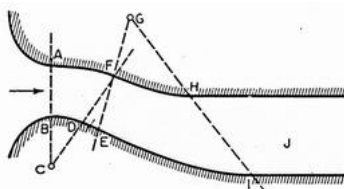


Зад. 7.1

7.2. Построить кривую Прандтль–Майера при изменении числа Маха от $M_1 = 1$ до $M_2 = 5$.



Зад. 7.3.



Зад. 7.4.

7.3. Плоская струя покидает суживающееся - расширяющееся сопло параллельным потоком и вытекает в атмосферу, где давление равно $0,101325 \text{ МПа}$. Отношение площадей сопла равно 2,0.

Определить угол δ в градусах, если: а) $p_0 = 14 \text{ бар}$, б) p_0 равно бесконечности.

7.4. Сопло спрофилировано, чтобы получить параллельный однородный поток воздуха при числе Маха равным 1,775. Принципы построения сопла показаны на рисунке.

Допускаем, что входной участок имеет очертание, которое позволяет получить горизонтальный параллельный поток в горловом сечении AB .

ГЛАВА 8.

СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ.

Скачки уплотнения в газовой среде представляют собой не только интересное физическое явление, но имеют и огромное практическое значение. Дело в том, что, как будет показано в дальнейшем, сжатие газа в скачках уплотнения сопровождается необратимым переходом части его механической энергии в энергию тепловую, которая рассеивается в среде. В результате такого перехода энтропия газа при его течении сквозь скачок нарастает и, таким образом, сжатие газа в скачке не является изоэнтропическим. В этом смысле мы будем говорить далее о потерях механической энергии в скачках уплотнения.

При движении тела в газовой среде потери энергии в скачках уплотнения компенсируются энергией движущегося тела. Поэтому, как только появляются скачки уплотнения (то есть при $M_\infty > M_{кр}$), лобовое сопротивление тела резко возрастает; этот прирост лобового сопротивления называется *волновым сопротивлением* и, в зависимости от формы тела и числа M_∞ , может оказаться значительно

большим, чем вся остальная часть лобового сопротивления. Появление скачков уплотнения резко изменяет также распределение давлений по поверхности тела, подъёмную силу и аэродинамический момент. Скачки уплотнения имеются практически во всех случаях сверхзвукового потока, хотя следует заметить, что просто наличие сверхзвукового потока не означает, что скачки уплотнения должны появиться где-нибудь в поле потока. Изучение скачков уплотнения необходимо для расчёта сопел, диффузоров, скоростных летательных аппаратов (ракет и самолётов), реактивных двигателей, газовых турбин, сверхзвуковых компрессоров и т.д.

Мы будем рассматривать более общий случай скачков уплотнения – *косые скачки*. Иногда косой скачок является присоединённым к поверхности тела, но это имеет место только когда поток вынужден резко (внезапно) изменить направление, как это имеет место в случае резко искривлённого вогнутого угла. В других случаях наклонный скачок обычно является отсоединённым.

При изучении скачка уплотнения в идеальной среде мы будем считать, что он не имеет толщины, а представляет собой поверхность разрыва непрерывности для скорости, давления и плотности. В действительности скачок уплотнения имеет весьма малую толщину, порядка длины свободного пробега молекул газа (эксперименты показывают толщину скачка порядка 10^{-3} мм).

Невозможность Прандтль-Майеровского сжатия для вогнутого угла. Если бы мы допустили возможность Прандтль-Майеровского сжатия для резкого угла (рис. 8.1), следуя вышеизложенному анализу в предыдущем разделе учебника, мы должны были бы констатировать, что линии тока возвращаются и пересекаются. Это означает, что в каждой точке области сжатия должны были бы существовать одновременно три различных давления и скорости.

Но это физически невозможно. Косой скачок уплотнения позволяет избежать эти трудности, допуская внезапное изменение направления движения.

Из рис. 8.1b мы видим, что угол наклона скачка

$$\sigma = \frac{1}{2} \alpha_1 + \alpha_2 + \delta .$$

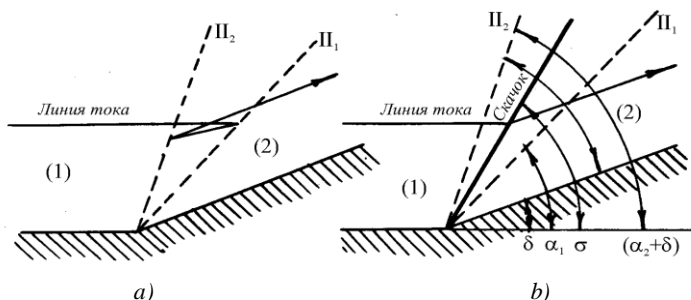


Рис. 8.1 – Течение вдоль вогнутого угла:

a) – невозможность Прандтль-Майеровского сжатия;

b) – наклонный скачок физически возможен.

8.1 Основные уравнения косого скачка уплотнения

Анализ косого скачка будем проводить, записав уравнения: неразрывности, изменения количества движения и энергии для потока, проходящего через контрольную поверхность.

Заметив, что контрольная поверхность ограничена по бокам двумя линиями тока, мы можем записать:

Уравнение неразрывности

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2} . \quad (8.1)$$

Уравнение количества движения в t-направлении

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}; \quad \therefore V_{t1} = V_{t2} = V_t . \quad (8.2)$$

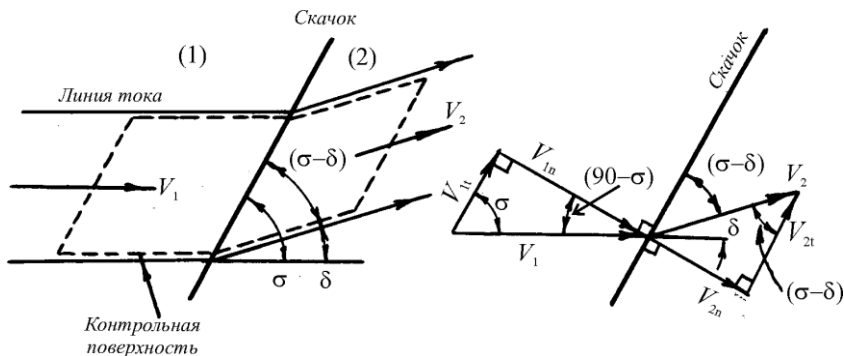


Рис. 8.2 – Обозначения при анализе наклонных скачков

Уравнение количества движения в n -направлении

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2. \quad (8.3)$$

Уравнение энергии

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1}.$$

Или, так как

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \frac{V_{n1}^2 + V_{t1}^2 - V_{n2}^2 - V_{t2}^2}{2} = \frac{V_{n1}^2 - V_{n2}^2}{2},$$

мы можем записать

$$\frac{V_{n1}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{n2}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1} - \frac{V_{t1}^2}{2}. \quad (8.4)$$

Уравнения (8.1), (8.2), (8.3) и (8.4) совместно с соотношениями для идеального газа полностью определяют зависимость между состояниями по обе стороны скачка. Например, предположим, что состояние (1) полностью определено величинами p_1 , ρ_1 , V_{n1} и V_{t1} . Затем, решая вышеприведенные четыре уравнения, мы определяем p_2 , ρ_2 , V_{n2} и V_{t2} . Так как V_{n1} и V_{t1} совместно определяют угол

наклона скачка σ и так как V_{n2} и V_{t2} совместно определяют угол $(\sigma - \delta)$, мы находим угол поворота потока δ . Величины p и ρ определяют скорость звука a , так что значение числа Маха до и после скачка M_1 и M_2 могут быть найдены.

Четыре основных уравнения (8.1), (8.2), (8.3) и (8.4) могут быть по разному скомбинированы, что приводит к множеству алгебраических соотношений для различных параметров скачка. Мы постараемся получить такие соотношения, которые позволяют простые численные расчёты или которые приводят к основным выводам, касающимся природы косого скачка.

Из уравнения энергии, записанного в форме уравнения (3.10)

$$i_1 + \frac{V_1^2}{2} = i_2 + \frac{V_2^2}{2} = i_0 = C_p T_0$$

закключаем, что при прохождении газа сквозь скачок уплотнения сохраняются полная энтальпия i_0 , температура адиабатически заторможенного газа T_0 и, следовательно, a_0 , a_* , T_* .

$$T_{01} = T_{02}, \quad i_{01} = i_{02}, \quad T_{*1} = T_{*2}, \quad a_{01} = a_{02}, \quad a_{*1} = a_{*2}.$$

Уравнение Ренкина-Гюгонио. Интересное соотношение, связывающее отношение давлений и отношение плотностей, известно под этим названием. Переписав уравнение (8.3) и используя уравнение (8.1), получаем

$$p_2 - p_1 = \rho_1 V_{n1}^2 - \rho_2 V_{n2}^2 = \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_{n2}^2}{V_{n1}^2} \right) = \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right),$$

откуда имеем

$$V_{n1}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Аналогично из уравнений (8.3) и (8.1) для V_{n2} получаем

$$V_{n2}^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Умножая эти два соотношения, будем иметь

$$V_{n1} V_{n2} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (8.5)$$

Уравнение энергии (8.4) можно переписать

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{V_{n1}^2 - V_{n2}^2}{2}.$$

Подставляя сюда ранее полученные соотношения для V_{n1}^2 и V_{n2}^2 и несколько преобразовав, мы получаем отношение давлений в функции отношения плотностей или отношение плотностей в функции отношения давлений

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1}}. \quad (8.6)$$

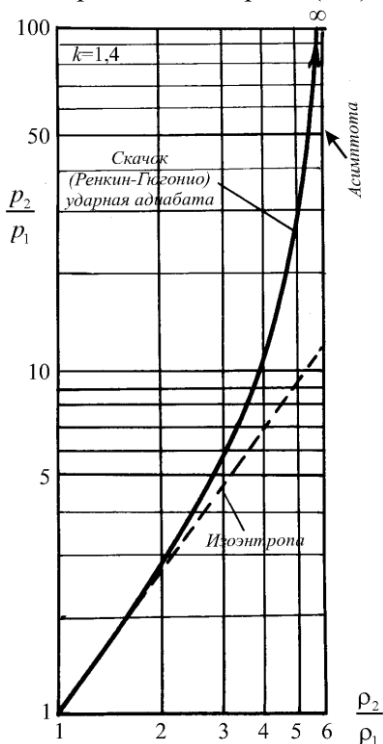


Рис. 8.3 – Уравнение Ренкина-Гюгонио в сравнении с изотропным течением ($k=1,4$)

Это соотношение изображено на рис. 8.3 совместно с изоэнтропийным соотношением между давлением и плотностью (p/ρ^k). Из рис. 8.3 и уравнений (8.6) мы видим, что для двухатомных газов плотность не может увеличиться больше, чем в шесть раз, в то время как отношение плотностей может достигать бесконечно большой величины. Кривые указывают также другую важную черту – *слабые скачки близки к изоэнтропе*. «Слабый скачок» – в котором повышение давления в процентах небольшое.

Ренкин-Гюгонио уравнение справедливо как для прямого, так и для косога скачков с любым углом наклона скачка.

Уравнение Прандтля. Интересное соотношение между компонентами скорости может быть получено исключением давления и плотности из основных уравнений.

Запишем уравнение энергии

$$\frac{V_{n1}^2 + V_t^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_{n2}^2 + V_t^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{a_*^2}{2} \frac{k+1}{k-1}.$$

Из этого уравнения мы определяем p_1 и p_2

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_{n1}^2 + V_t^2 \right],$$

$$p_2 = \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_{n2}^2 + V_t^2 \right].$$

Подставляя эти выражения в уравнение количества движения в n -направлении (8.3), имеем

$$\rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] - \rho_1 V_{n1}^2 \frac{k-1}{2k} -$$

$$- \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \rho_2 V_{n2}^2 \frac{k-1}{2k} = \rho_2 V_{n2}^2 - \rho_1 V_{n1}^2.$$

Сгруппируем составляющие уравнения, в которые входят $\rho_1 V_{n1}^2$ и $\rho_2 V_{n2}^2$.

$$\rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) = \frac{k+1}{2k} \rho_1 V_{n1}^2, \quad -\rho_2 V_{n2}^2 \left(1 - \frac{k-1}{2k}\right) = -\frac{k+1}{2k} \rho_2 V_{n2}^2.$$

Тогда вышенаписанное уравнение примет вид

$$\rho_1 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \frac{k+1}{2k} \rho_1 V_{n1}^2 = \rho_2 \left[\frac{k+1}{2k} a_*^2 - \frac{k-1}{2k} V_t^2 \right] + \frac{k+1}{2k} \rho_2 V_{n2}^2.$$

Умножим обе стороны равенства на $V_{n1} V_{n2}$ и вынесем $\frac{k+1}{2k}$:

$$V_{n2} \rho_1 V_{n1} \frac{k+1}{2k} \left[V_{n1}^2 + a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] = V_{n1} \rho_2 V_{n2} \frac{k+1}{2k} \left[V_{n2}^2 + a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right].$$

После сокращения с учётом (8.1) получаем:

$$V_{n2} V_{n1}^2 + V_{n2} \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] = V_{n1} V_{n2}^2 + V_{n1} \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right],$$

$$V_{n2} V_{n1} - V_{n1} - V_{n2} = \left[a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \right] V_{n1} - V_{n2}.$$

Тогда окончательно получаем уравнение, носящее имя Прандтля:

$$V_{n2} V_{n1} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2. \quad (8.7)$$

Из уравнения (8.7) мы видим, что *нормальная составляющая скорости за скачком – дозвуковая*. В частности, если скачок прямой, то есть $V_t = 0$, мы будем иметь

$$V_1 V_2 = a_*^2.$$

Отсюда следует, что, так как перед скачком скорость сверхзвуковая, то *за прямым скачком скорость всегда должна быть дозвуковой*.

Другое часто используемое соотношение получаем, комбинируя уравнение (8.5) и (8.7)

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} V_t^2. \quad (8.8)$$

Рабочие формулы для косо́го скачка. Получим теперь удобные формулы для численных подсчётов.

Из геометрии рис. 8.2 имеем:

$$V_{t1} = V_1 \cdot \cos \sigma; \quad V_{t2} = V_2 \cdot \cos \sigma - \delta;$$

$$V_{n1} = V_1 \cdot \sin \sigma; \quad V_{n2} = V_2 \cdot \sin \sigma - \delta.$$

Так как $V_{t1} = V_{t2}$, то из первого ряда уравнений

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos \sigma - \delta}{\cos \sigma}.$$

Используя уравнение неразрывности (8.1) и второй ряд уравнений, получаем

$$\rho_1 V_1 \sin \sigma = \rho_2 V_2 \sin \sigma - \delta.$$

Следовательно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma - \delta} = \frac{\cos \sigma - \delta}{\cos \sigma} \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma - \delta} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \sigma - \delta}. \quad (8.9)$$

Видоизменим уравнение (8.3) с помощью уравнения (8.1), второго ряда геометрических соотношений и уравнения (8.9)

$$\begin{aligned}
p_2 - p_1 &= \rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{V_{n2}^2}{V_{n1}^2} \right) = \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{V_{n2}}{V_{n1}} \right) = \\
&= \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \frac{\sin \sigma - \delta}{\sin \sigma} \right) = \rho_1 V_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right).
\end{aligned}$$

Так как $\rho_1 V_1^2 = \rho_1 \frac{V_1^2}{a_1^2} a_1^2 = \rho_1 M_1^2 k \frac{p_1}{\rho_1} = k p_1 M_1^2$, мы можем полу-

чить

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + k M_1^2 \sin^2 \sigma \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right). \quad (8.10)$$

Путём аналогичных преобразований, вынося $\rho_2 V_{n2}^2$ из уравнения (8.3), мы получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + k M_2^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin^2 \sigma - \delta. \quad (8.11)$$

Уравнения (8.6), (8.9), (8.10) и (8.11) являются соотношениями между переменными σ , δ , M_1 , M_2 , p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1 . Любые из этих двух переменных можно принять за независимые параметры, значения которых полностью определяют величины оставшихся четырёх переменных. Отношение температур, изменение энтропии и отношение давлений изоэнтропийно заторможенных потоков до и после скачка можно определить после того, как вышеназванные переменные будут определены.

Таблицы и диаграммы. Почти во всех книгах таблицы, представляющие уравнения скачка даны с M_1 и δ в качестве независимых аргументов. Весьма распространены диаграммы, в которых M_1 и δ взяты как независимые переменные (например, диаграмма 1 в приложении), а σ , M_2 , p_2/p_1 и p_{02}/p_{01} определяются. Соот-

ветствующие величины ρ_2/ρ_1 можно определить по рис. 8.3 или, зная p_2/p_1 , по уравнению (8.6) или по таблицам прямого скачка (ввиду вышесказанного, что уравнение Ренкина-Гюгоннио справедливо как для прямого, так и для косого скачков с любым углом наклона скачка σ).

8.2 Прямой скачок уплотнения. Правила взаимодействия скачков.

Прямой скачок является частным случаем косого скачка, у которого $\sigma = 90^\circ$ и $\delta = 0$. Тогда для нашей схемы течения мы будем иметь

$$V_x = V_{n1} = V_1, \quad V_y = V_{n2} = V_2.$$

На примере прямого скачка получим некоторые алгебраические соотношения между параметрами до и после скачка. Используя адиабатическое соотношение (3.20) между T , T_0 и M , мы можем записать

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{T_0}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}.$$

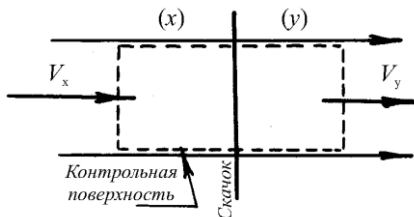


Рис. 8.4 – Контрольная поверхность вокруг прямого скачка

Из уравнения неразрывности (8.1) и соотношения $p = \rho RT$ мы получаем

$$\frac{RT_y}{p_y} V_x = \frac{RT_x}{p_x} V_y,$$

откуда

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{p_y}{p_x} \frac{M_y}{M_x} \frac{a_y}{a_x} = \frac{p_y}{p_x} \frac{M_y}{M_x} \sqrt{\frac{T_y}{T_x}}$$

и мы можем записать

$$\frac{T_y}{T_x} = \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \left(\frac{M_y}{M_x} \right)^2.$$

Приравнявая полученные два выражения для T_y/T_x , мы имеем

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{M_x}{M_y} \frac{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}}.$$

Из уравнения количества движения (8.3), помня что $\rho V^2 = k p M^2$, мы получаем

$$p_x + k p_x M_x^2 = p_y + k p_y M_y^2,$$

откуда имеем

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1 + k M_x^2}{1 + k M_y^2}.$$

Приравнявая полученные два выражения для p_y/p_x , мы получаем соотношение между M_x и M_y

$$\frac{M_x \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}}{1 + k M_x^2} = \frac{M_y \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2}}{1 + k M_y^2}.$$

Возведя в квадрат и несколько преобразовав это уравнение, мы решаем его относительно M_y . Получаем два решения

$$M_y = M_x$$

и

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_x^2 - 1} = \frac{k-1}{2kM_x^2 - k-1} \frac{M_x^2 + 2}{k-1}. \quad (8.12)$$

Подставляя сюда выражение для M_x и M_y через λ_x и λ_y (3.19) мы получаем уже известное нам уравнение Прандтля для прямого скачка уплотнения

$$\lambda_x \lambda_y = 1 \quad \text{или} \quad V_x V_y = a_*^2.$$

Для получения отношения давлений подставим (8.12) в полученное ранее отношение давлений через M_x и M_y

$$\begin{aligned} \frac{p_y}{p_x} &= \frac{1 + kM_x^2}{1 + kM_y^2} = \frac{1 + kM_x^2}{2kM_x^2 - k - 1} \frac{[2kM_x^2 - k - 1]}{+k \frac{k-1}{2k} M_x^2 + 2k} = \\ &= \frac{1 + kM_x^2}{k+1} \frac{[2kM_x^2 - k - 1]}{1 + kM_x^2} = \frac{2kM_x^2 - k - 1}{k+1}. \\ \frac{p_y}{p_x} &= \frac{2k}{k+1} M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Подставляя (8.12) в полученное ранее отношение температур через M_x и M_y , получаем

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_y^2} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right)}{\left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right) + \frac{k-1}{2} \left(M_x^2 + \frac{2}{k-1}\right)},$$

после элементарных упрощений окончательно имеем

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_x^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_x^2 - 1\right)}{\frac{k+1}{2} M_x^2}. \quad (8.14)$$

Отношение плотностей в зависимости от M_x можно найти, используя уравнение состояния для идеального газа и уравнений (8.13) и (8.14)

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{p_y}{p_x} \frac{T_x}{T_y}. \quad (8.15)$$

Отношение скоростей находим из уравнения неразрывности (8.1)

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{\rho_x}{\rho_y}.$$

Отношение заторможенных давлений можно определить так

$$\frac{p_{oy}}{p_{ox}} = \frac{p_{oy}}{p_y} \frac{p_y}{p_x} \frac{p_x}{p_{ox}}.$$

p_y/p_x нам дано уравнением (8.13), p_{oy}/p_y и p_x/p_{ox} могут быть определены из уравнения (3.21), для которого M_y определяем по (8.12), а M_x задано.

Прямой скачок удовлетворяет уравнениям энергии, неразрывности, количества движения и состояния рабочего тела одновременно. Поэтому для заданного состояния x перед скачком точка y , характеризующая состояние рабочего тела за прямым скачком, должна принадлежать как линии Фанно, так и линии Релея. Следовательно, пересечение этих двух линий, исходящих из точки x , и представляет собой точку, характеризующую состояние рабочего

тела за прямым скачком, то есть точку у (рис. 8.5).

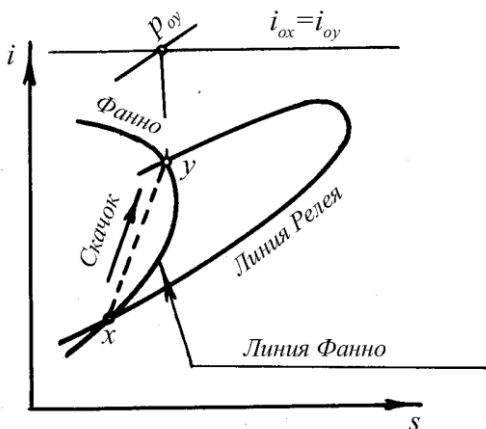


Рис. 8.5 – Линия Фанно и линия Релея и точки, характеризующие состояние рабочего тела до (точка x) и после (точка y) прямого скачка

Зависимости между параметрами потока для прямого скачка уплотнения протабулированы и имеются во всех учебниках и задачниках по газодинамике (таблица 3 в приложении). Они могут быть использованы для расчёта косых скачков. Косой скачок со значением M_1 набегающего потока преобразованием системы координат может быть сведён к прямому скачку со значением числа Маха набегающего потока, равным $M_1 \cdot \sin \sigma$. Следовательно, если M_x в таблицах прямого скачка взято равным $M_1 \cdot \sin \sigma$, то p_y/p_x , ρ_y/ρ_x , T_y/T_x и p_{oy}/p_{ox} в этой таблице являются соответственно величинами p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 и p_{01}/p_{02} для косого скачка с входным углом Маха M_1 и углом скачка σ . Из геометрии рис. 8.2 следует далее, что $M_2 = M_y / \sin \sigma - \delta$.

Правила взаимодействия. Из анализа, приведенного на рис. 8.1*b* мы приходим к следующим выводам о возможности взаимодействия волн одного и того же семейства:

a) Скачок всегда стремится к взаимодействию с волнами непрерывности, находящимися за скачком (рис. 8.6*a*).

b) Скачок всегда стремится к взаимодействию с волнами непрерывности, находящимися перед ним (рис. 8.6*b*).

c) Два скачка одного семейства всегда стремятся встретиться (рис. 8.6*c*).

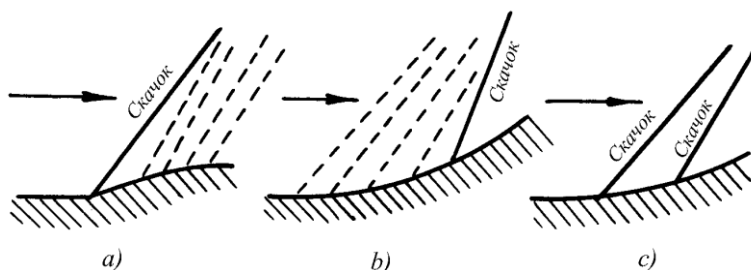


Рис. 8.6 – Взаимодействие волн одного и того же семейства

8.3 Ударные поляры

Два типа графического представления соотношений косого скачка, которые могут быть построены, являются весьма широко используемыми, так как включают некоторые геометрические параметры скачка.

Годограф ударной поляры. Обозначим x и y компоненты скорости через u и v соответственно и предположим, что поток приближается к скачку в x -направлении, так что $u_1 = V_1$ и $v_1 = 0$. Тогда состояния до и после скачка могут быть размещены в плоскости годографа, как показано на рис. 8.7*a*.

Для данного угла поворота δ все необходимые параметры для размещения вектора V_2 и угол скачка σ могут быть определены по вышеприведенным формулам, точка 2 может быть размещена в плоскости годографа. Компоненты скоростей, параллельные линии скачка, должны совпасть, так как $V_{t1} = V_{t2} = V_t$, как это показано на рис. 8.7а.

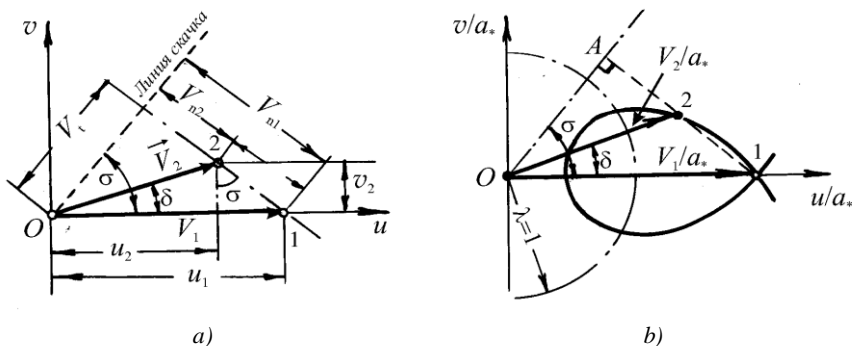


Рис. 8.7 – Годограф ударной поляры:

a – положение векторов скорости до и после скачка; b – годограф ударной поляры.

Следует также заметить, что рис. 8.7а может быть найден простым сдвигом треугольников скоростей (рис. 8.2).

Теперь, для каждого значения V_1/a_* имеется бесконечное число конечных состояний (соответствующие различным значениям δ) в плоскости годографа, которые могут быть достигнуты из состояния 1. Семейство этих точек известно как годограф ударной поляры для λ_1 . Типичная ударная поляра показана на рис. 8.7b. Она симметрична относительно горизонтальной оси, так как имеются две возможные волны скачка для данных значений M_1 и δ , одна слева, если смотреть в сторону течения, другая – справа. Имея од-

нажды построенную ударную поляру для данного значения V_1/a_* , решение для заданного значения угла поворота δ находят, отступив от оси на угол δ . В месте пересечения ударной поляры с линией, проведенной под углом δ , находится конечная точка вектора скорости V_2/a_* . Перпендикуляр OA к продолжению прямой 1-2 даёт направление линии скачка. Семейство ударных поляр в плоскости годографа с V_1/a_* в качестве параметра показано на рис. 8.8.

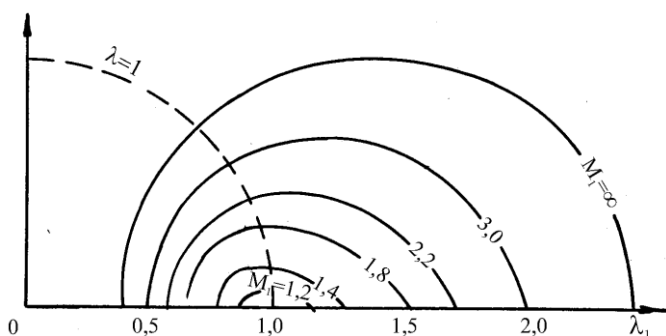


Рис. 8.8 – Семейство ударных поляр ($k=1,4$)

Уравнение ударной поляры. Из геометрии рис. 8.7а находим

$$V_{n1} = V_1 \sin \sigma, \quad V_{n2} = u_2 \sin \sigma - v_2 \cos \sigma, \quad V_t = V_1 \cos \sigma.$$

Из геометрии рис 8.7а также получаем

$$\sin \sigma = \frac{V_1 - u_2}{N}, \quad \cos \sigma = \frac{v_2}{N},$$

где $N = \sqrt{V_1 - u_2 + v_2^2}$, то есть гипотенуза 1-2.

Подставляя полученные соотношения в уравнение Прандтля (8.7), мы получаем

$$\frac{V_1}{N^2} \frac{V_1 - u_2}{N^2} \left[\frac{u_2}{N^2} \frac{V_1 - u_2}{N^2} - \frac{v_2^2}{N^2} \right] = a_*^2 - \frac{k-1}{k+1} \frac{V_1^2 v_2^2}{N^2},$$

$$V_1 u_2 \sqrt{V_1 - u_2^2} - V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 N^2 - \frac{k-1}{k+1} V_1^2 v_2^2,$$

$$V_1 u_2 \sqrt{V_1 - u_2^2} - \frac{2}{k+1} V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 N^2,$$

$$V_1 u_2 \sqrt{V_1 - u_2^2} - \frac{2}{k+1} V_1^2 v_2^2 + V_1 u_2 v_2^2 = a_*^2 \sqrt{V_1 - u_2^2} + a_*^2 v_2^2,$$

$$v_2^2 \left(\frac{2}{k+1} V_1^2 - V_1 u_2 + a_*^2 \right) = \sqrt{V_1 - u_2^2} \sqrt{V_1 u_2 - a_*^2}.$$

Откуда получаем

$$v_2^2 = \frac{\sqrt{V_1 - u_2^2} \sqrt{V_1 u_2 - a_*^2}}{\frac{2}{k+1} V_1^2 - V_1 u_2 + a_*^2}.$$

Разделив слева и справа равенства на a_*^2 , помня, что в нашем случае $V_1 = u_1$, окончательно мы получаем формулу

$$\left(\frac{v_2}{a_*} \right)^2 = \left[\frac{u_1}{a_*} - \frac{u_2}{a_*} \right]^2 \frac{\frac{u_1}{a_*} \frac{u_2}{a_*} - 1}{\frac{2}{k+1} \left(\frac{u_1}{a_*} \right)^2 - \frac{u_1}{a_*} \frac{u_2}{a_*} + 1}. \quad (8.16)$$

Эта формула позволяет нам построить v_2/a_* в зависимости от u_2/a_* для любой заданной величины параметра u_1/a_* .

Кривые семейства (8.16) представляют “строфоиды” (их ещё называют “гипоциссоидами” или “декартовыми листами”), графическое построение которых не составляет труда.

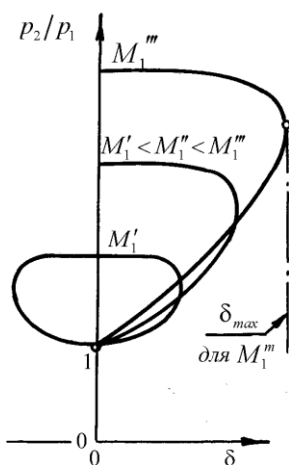


Рис. 8.9 – Ударные поляры в плоскости давление - поворотный угол

Ударная поляра в плоскости давление–поворотный угол. Позже мы увидим, что поверхность разрыва обычно образуется когда два скачка взаимодействуют один с другим или когда скачок взаимодействует с волной непрерывности. Такие поверхности разрыва обычно называют *линии скольжения* или *вихревые пелены*. Они являются также линиями тока и разделяют две области, имеющие равные давления и направление потока, но различные скорости.

Для такого рода задач удобно представлять соотношение косого скачка ударной полярой, для которой координатами являются угол поворота δ и отношение давлений.

Для заданного начального числа Маха формулы косого скачка позволяют нам определить отношение давлений p_2/p_1 как функцию угла поворота δ . Размещая эти значения как показано на рис. 8.9, мы получаем семейство $\delta - \bar{p}$ ударных поляр с M_1 в качестве параметра.

8.4 Некоторые специфические аспекты косых скачков

Интенсивные и слабые скачки. Интересным фактом, очевидным из графических представлений рис. 8.9 и рис. 8.10, является то, что для заданного начального значения M_1 и заданного угла

поворота δ имеется или два решения соотношений наклонного (косого) скачка или не имеется вовсе.

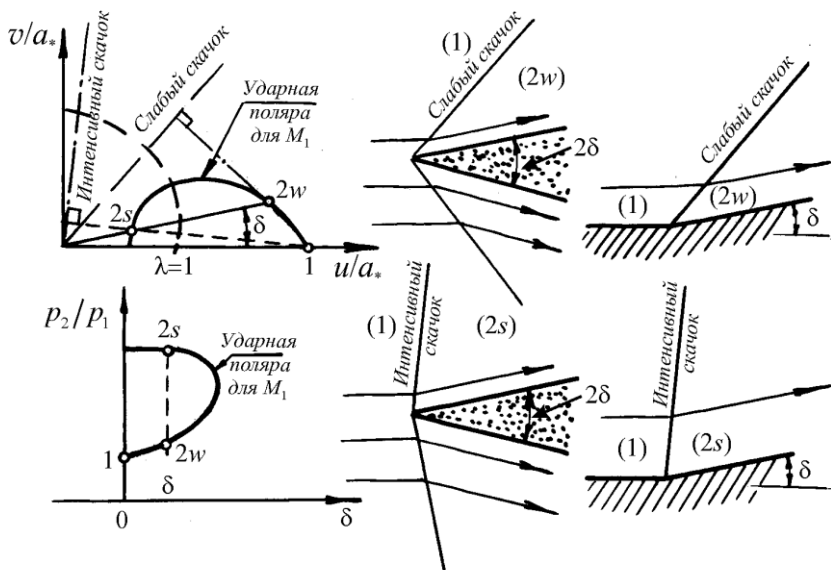


Рис. 8.10 – Слабые и интенсивные скачки

Рассмотрим случай натекания потока M_1 , как это показано на рис. 8.10. Из ударных поляр мы видим, что если решение существует, то это может быть или (i) *интенсивный скачок* (2s) с относительно большим углом скачка, относительно большим отношением давлений и с состоянием за скачком обычно дозвуковым, или (ii) *слабый скачок* (2w), с относительно малым углом скачка, с относительно малым отношением давлений и с состоянием за скачком обычно сверхзвуковым.

Какое из этих двух решений имеет место в действительности?

К сожалению нет простого и однозначного ответа на этот вопрос, но несколько общих рассуждений служат в качестве путево-
дителя.

Случай одномерного течения. Для начала понимания этой проблемы обсудим специальный случай одномерного сверхзвуко-
вого течения в трубе постоянного сечения. Для этого случая δ ра-
вен 0 и интенсивное решение на ударной поляре рис. 8.11 есть
прямой скачок, в то время как слабое решение есть бесконечно ма-
лая волна нулевого подъёма давления.

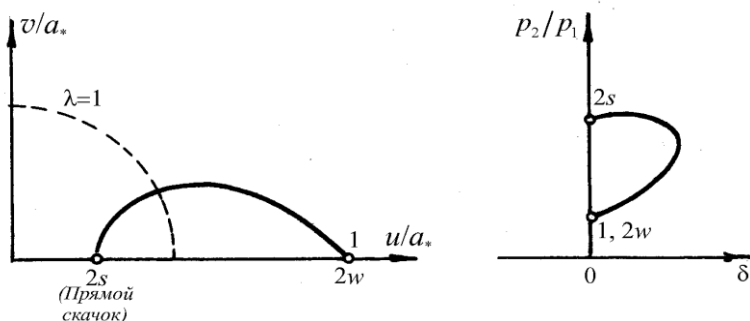


Рис. 8.11 – Интенсивный и слабый скачки при $\delta = 0$

Из наших ранее проведенных рассуждений одномерного тече-
ния в трубе очевидно, что решение, которое имеется, в действи-
тельности зависит от граничных условий, в частности от отноше-
ния давления внизу по потоку к давлению вверх по потоку. Если
давление внизу по потоку сравнительно низкое, слабое решение
имеет место, иначе можно сказать нет скачка совсем. Если давле-
ние внизу по потоку достаточно высокое, имеем прямой скачок в
трубе, то есть интенсивное решение имеет место.

Двухмерное течение. Возвращаясь теперь к основному случаю
косого скачка, мы, обобщая рассуждения предыдущего параграфа,

можем сказать, что является косой скачок интенсивным или слабым зависит в конечном счёте от граничных значений давления. Если давление внизу по потоку для двухмерного течения рис. 8.12а является достаточно малым, слабый скачок будет иметь место на углу A и поток, достигая угол B , будет как правило сверхзвуковым.

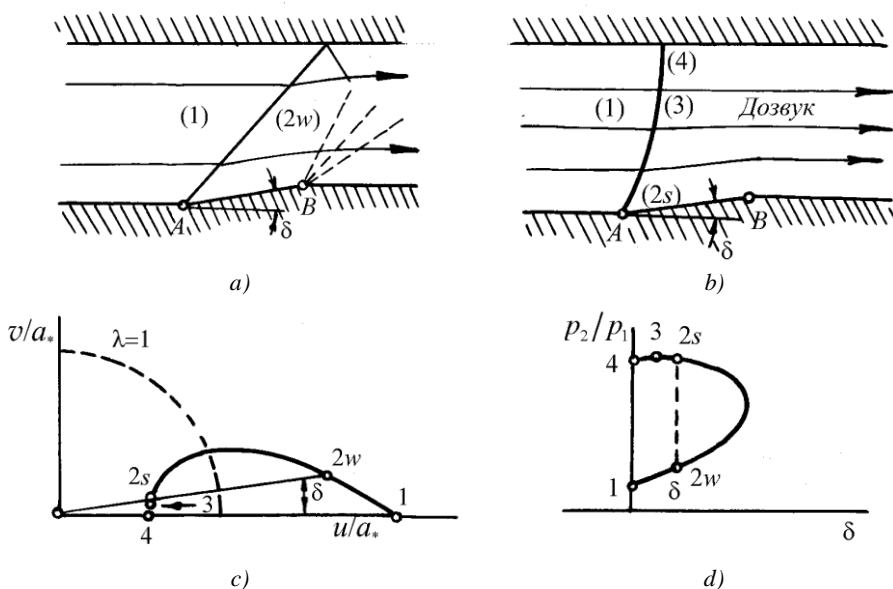


Рис. 8.12 – Влияние противодавления на форму скачка:

- a) – слабый скачок (малое противодавление);
- b) – интенсивный искривлённый скачок (повышенное противодавление);
- c) – годограф ударной полиары;
- d) – ударная полиара в плоскости давление – поворотный угол

Если противодавление достаточно высокое, скачок, исходящий из угла A , будет интенсивным и поток, приближающийся к углу B , будет как правило дозвуковым. Как будет показано позже, наклонный скачок искривится, как показано на рис. 8.12b, и превратится

в прямой у верхней стенки. Каждая линия тока поэтому проходит через скачок различной интенсивности и каждая точка на линии скачка представлена соответствующей точкой на сегменте между $2s$ и 4 ударной поляры (рис. 8.12*c* и рис. 8.12*d*). Течение за скачком дозвуковое, линии тока искривлены, имеются изменения энтропии от линии тока к линии тока.

Когда симметричный клин движется в атмосфере со сверхзвуковой скоростью, только слабые скачки наблюдаются на практике. В атмосфере далеко за клином давление может отличаться от такового перед клином только на бесконечно малую величину и следовательно, граничные условия являются таковыми, что слабый скачок имеет место.

Отсоединённые скачки. Различные графические представления рис. 8.8 и рис. 8.9 показывают, что для заданного начального значения числа Маха M_1 имеется максимальное значение поворотного угла δ_{max} , для которого существует решение косо́го скачка. И наоборот, для заданного угла поворота δ имеется минимальное начальное число Маха M_{1min} , для которого имеется решение косо́го скачка.

Из рис. 8.13*a* и рис. 8.13*b* очевидно, что при этом предельном условии слабый и интенсивный наклонные скачки совпадают. Соотношение между M_1 и δ_{max} , или между M_{1min} и δ показано на рис. 8.13*c*. Решение не может быть получено в затемнённой области ниже кривой на этом рисунке.

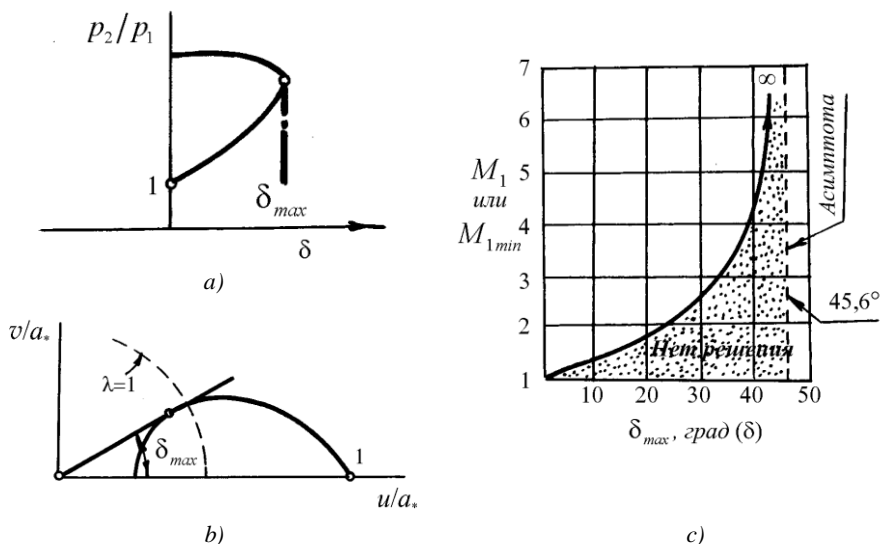


Рис. 8.13 – Максимальный поворотный угол для данного начального числа Маха:

- a) – давление – поворотный угол ударная поляря;
 b) – годограф ударной поляря; c) – график для $k = 1,4$.

Рассмотрим случай однородного параллельного потока с числом Маха M_1 , набегающего на клин с половинным углом δ . Если δ меньше, чем δ_{max} , скачок будет присоединённым к конусу. Однако, если δ больше, чем δ_{max} , скачок не может быть присоединённым к клину, так как для этого требовалось бы чтобы линия тока, приближаясь к вершине клина, повернулась на угол больше, чем δ_{max} . Под влиянием этих обстоятельств мы наблюдаем в практике, что скачок отсоединяется от клина (рис. 8.14a и рис. 8.14b). Именно поэтому отсоединённый скачок всегда устанавливается перед тупым телом (рис. 8.14c).

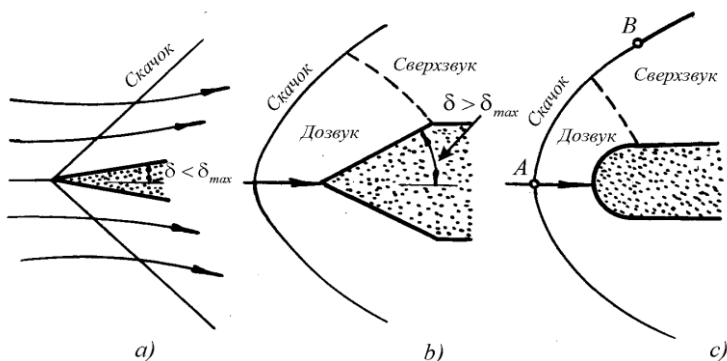


Рис. 8.14 – Присоединённый и отсоединённый скачки:

- а) – присоединённый скачок на клине с малым углом раскрытия;
- б) – отсоединённый скачок в случае клина с большим углом раскрытия;
- в) – отсоединённый скачок перед тупым телом.

Отсоединённые скачки являются переменной кривизны. Если тело (рис. 8.14с) представляет собой входную кромку крыла сверхзвукового самолёта, интуитивно мы видим, что кривой скачок, который начинается в точке A как прямой, должен постепенно ослабевать до точки B , находящейся на довольно большом расстоянии от тела, превращаясь в волну с исчезающей интенсивностью, то есть волну Маха. Если это не так, воздух, минуя крыло, должен был бы подвергнуться бесконечному изменению энтропии, а это вызвало бы в результате бесконечно большое сопротивление. С искривлённым отсоединённым скачком (рис. 8.14с) мы имеем сегмент скачка, соответствующий всем точкам на кривой ударной поляры с данными M_1 . За отсоединённым скачком поток частично сверхзвуковой и частично дозвуковой, что приводит к большим трудностям при анализе, так как мы имеем различные свойства дифференциальных уравнений дозвукового и сверхзвукового потоков.

Аналогичные рассуждения применимы к течению, обтекающему вогнутый угол в трубе (рис. 8.15).

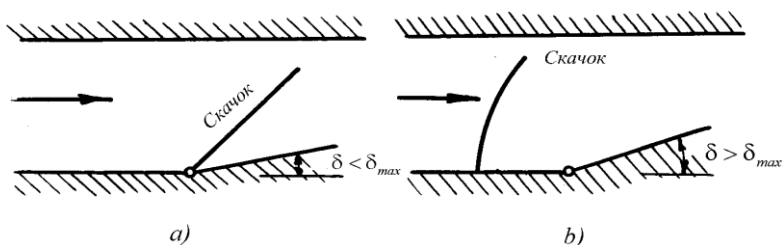


Рис. 8.15 – Присоединённый и отсоединённый скачки на поверхности с изломом в трубе

Звуковой поток после скачка. Как видно из рис. 8.16 для каждого значения M_1 имеется определённый поворотный угол δ_* , для которого поток за скачком точно звуковой. Соотношения между δ_* и δ_{max} иллюстрируются на рисунке 8.16, то есть δ_* всегда меньше δ_{max} .

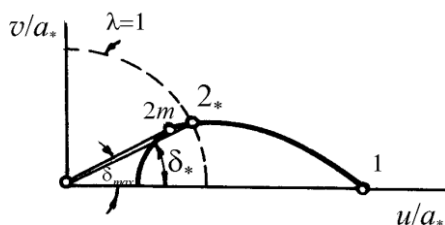


Рис. 8.16 – Взаимосвязь между δ_{max} и δ_*

Однако для $k = 1,4$ δ_* не отличается от δ_{max} больше, чем на $0,5^\circ$ во всем диапазоне чисел Маха от 1 до бесконечности. Это означает, что за исключением очень узкой области *поток за слабым скачком сверхзвуковой и поток за интенсивным скачком дозвуковой*.

Изменение энтропии в скачке можно определить, пользуясь формулами (2.24) или (2.25)

$$s_2 - s_1 = \frac{R}{k-1} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k.$$

Посмотрим как изменяется энтропия при переходе через скачок уплотнения. Используя результаты подстановки в уравнение Ренкина-Гюгонио (8.6), легко убедиться, что для скачка уплотнения, для которого $\rho_2/\rho_1 > 1$, всегда

$$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k$$

и, следовательно, согласно формулы для изменения энтропии (2.25) *при переходе через скачок энтропия газа возрастает.*

Очень слабый скачок. Пользуясь уравнением Ренкина-Гюгонио (8.6), можно рассмотреть изменение состояния газа при переходе через слабый скачок.

Полагая $p_1 = p$, $\rho_1 = \rho$, $p_2 = p + dp$, $\rho_2 = \rho + d\rho$ из уравнения (8.6), имеем

$$\begin{aligned} \frac{p + dp}{p} &= \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho + d\rho}{\rho}}, \\ \frac{dp}{p} &= -1 + \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - 1 - \frac{d\rho}{\rho}} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho + d\rho}{\rho} - 1}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}} - 1, \end{aligned}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho+d\rho}{\rho} - 1 - \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho+d\rho}{\rho} \right)}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}},$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\frac{2k}{k-1} \frac{\rho+d\rho}{\rho} - \frac{2k}{k-1}}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{\frac{2k}{k-1} \left(1 + \frac{d\rho}{\rho} - 1 \right)}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}},$$

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} \frac{\frac{2}{k-1}}{\frac{2}{k-1} - \frac{d\rho}{\rho}}.$$

При $dp \rightarrow 0$ и $d\rho \rightarrow 0$. Предел отношения $dp/d\rho$, однако, так как $d\rho/\rho \rightarrow 0$, равен $\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho} = a^2$.

Мы приходим к уравнению изоэнтропического процесса

$$\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}.$$

Таким образом, изменение состояния в скачке бесконечно малой интенсивности (слабый скачок) является изоэнтропическим.

Комбинируя полученный результат с уравнением (8.5) и замечая, что для очень слабого скачка уравнения (8.1) и (8.3) предполагают, что V_{n2} приближается к V_{n1} , мы получаем

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \rightarrow a^2; \quad V_{n2} V_{n1} \rightarrow V_n^2; \quad \therefore V_n \rightarrow a.$$

Другими словами, составляющая скорости, перпендикулярная к волне, становится равной скорости звука. Следовательно

$$\operatorname{tg} \sigma \rightarrow \frac{a}{V_t} = \operatorname{tg} \alpha,$$

так что в пределе угол скачка σ становится равным углу Маха α . Мы показали, что волна наклонного скачка бесконечно малой интенсивности идентична с волной Маха. Для заданного начального значения числа Маха M_1 интенсивность скачка приближается к нулю при приближении поворотного угла δ к нулю.



Рис. 8.17 – Перпендикуляр к годографу ударной поляры в точке 1 является линией Маха

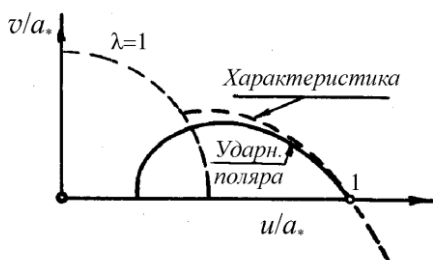


Рис. 8.18 – Ударная поляра и характеристика в плоскости годографа, проходящие через точку 1 имеют равные углы наклона и радиус кривизны

Если точка 2 на рисунке 8.7b будет приближаться к точке 1, мы получим в пределе конструкцию (рис. 8.17), где направление волны Маха определяется перпендикуляром к касательной к ударной поляре в точке 1. Помня, что нормаль к характеристике в плоскости годографа даёт направление линии Маха, очевидно из рисунка 8.17, что для данного начального состояния ударная поляра и характеристические кривые в плоскости годографа касательные друг к другу. Более того, можно показать, что ударная поляра и характеристиче-

ские кривые имеют одинаковый радиус кривизны в точке 1. То есть, как показано на рис. 8.18, ударная поляра и характеристические кривые являются весьма близко совпадающими для малых углов поворота.

В заключении интересно заметить, что метод характеристик, анализ косых скачков и линеаризованная сверхзвуковая теория все дают одинаковые результаты в предельном случае, когда сверхзвуковой поток поворачивается на исчезающе малый угол.

8.5 Потери в скачках уплотнения.

Как мы ранее говорили, предполагая энергетически изолированное течение в скачках, полная энергия потока при переходе через скачок не меняется. То есть

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2},$$

или

$$\frac{V_1^2}{2} + i_1 = \frac{V_2^2}{2} + i_2 = i_0.$$

Пользуясь параметрами полного торможения, из первой записи уравнения энергии имеем

$$\frac{p_{01}}{\rho_{01}} = \frac{p_{02}}{\rho_{02}}.$$

Зная давление торможения до скачка p_{01} и энтальпию торможения i_0 , находим в диаграмме $i-s$ точку O_1 , характеризующую состояние изоэнтропически заторможенного газа до скачка.

По известной V_1 и p_1 находим точку 1, которая определяет состояние движущегося газа перед скачком. В скачке статическое давление потока увеличивается до p_2 . Если известен угол

отклонения потока δ , то состояние газа 2 за скачком определено, так как по формуле (2.24) или (2.25) можно найти приращение энтропии $\Delta s = s_2 - s_1$. Заметим, что линия, соединяющая точки 1 и 2 на рисунке 8.19, не характеризует изменение состояния газа в скачке, так как в диаграмме i - s неквазистатические процессы могут быть представлены только начальной и конечной точками процесса.

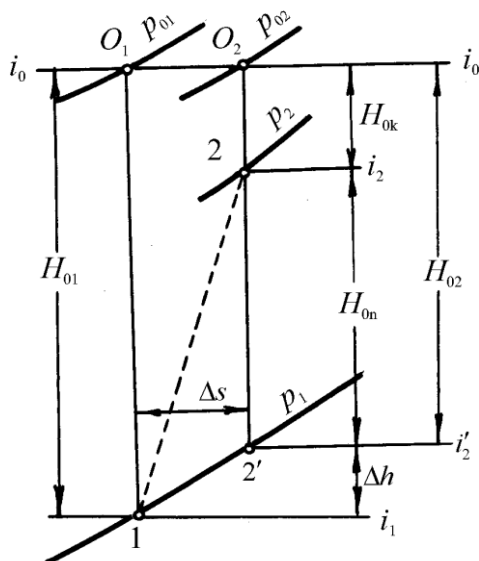


Рис. 8.19 – Скачок уплотнения в i - s диаграмме

Если поток за скачком изэнтропически затормозить, то состояние полного торможения характеризуется точкой O_2 , в которой легко находится значение p_{02} . Если предоставить теперь потоку возможность изэнтропически расшириться до давления перед скачком, то его состояние будет определено точкой 2'.

H_{02} – изоэнтропический перепад энтальпий за скачком,

H_{0k} – кинетическая энергия потока за скачком,

H_{0n} – изменение потенциальной энергии потока в скачке

$$H_{02} = H_{0k} + H_{0n},$$

H_{01} – изоэнтропический перепад энтальпий до скачка.

Потери кинетической энергии в скачке

$$\Delta h = H_{01} - H_{02} = \frac{V_1^2 - V_2'^2}{2},$$

где V_2' – скорость газа, если предоставить потоку за скачком расшириться до давления перед скачком.

Коэффициент потерь энергии в скачке

$$\zeta_c = \frac{\Delta h}{H_{01}} = 1 - \frac{H_{02}}{H_{01}}.$$

Из уравнения энергии $V_1^2/2 + i_1 = i_0$ следует

$$H_{01} = i_0 - i_1 = V_1^2/2.$$

Воспользовавшись другой формой записи этого же уравнения, имеем

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} - \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = H_{01}, \quad H_{01} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[1 - \frac{p_1}{p_{01}} \frac{\rho_{01}}{\rho_1} \right].$$

Воспользовавшись уравнением изоэнтропы

$$\rho_{01}/\rho_1 = p_{01}/p_1^{\frac{1}{k}} = p_1/p_{01}^{-\frac{1}{k}}, \text{ окончательно получаем}$$

$$H_{01} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Аналогично имеем

$$H_{02} = \frac{k}{k-1} \frac{p_{02}}{\rho_{02}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Подставляя, получаем (помня, что $p_{01}/\rho_{01} = p_{02}/\rho_{02}$)

$$\begin{aligned} \zeta_c &= 1 - \frac{1 - p_1/p_{02}^{\frac{k-1}{k}}}{1 - p_1/p_{01}^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{p_1/p_{02}^{\frac{k-1}{k}} - p_1/p_{01}^{\frac{k-1}{k}}}{1 - p_1/p_{01}^{\frac{k-1}{k}}} = \\ &= \frac{p_{01}/p_{02}^{\frac{k-1}{k}} - 1}{p_{01}/p_1^{\frac{k-1}{k}} - 1}. \end{aligned}$$

Вспомним, что согласно уравнению (3.21)

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}},$$

окончательно получаем

$$\zeta_c = \frac{2}{k-1} \frac{1}{M_1^2} \left[\left(\frac{p_{01}}{p_{02}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (8.17)$$

Отношения давлений торможения до и после скачка можно определить следующим образом

$$\frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{p_{01}}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_{02}}.$$

На рисунке 8.20 представлен график ζ_c в косом скачке в зависимости от угла σ и безразмерной скорости возмущённого потока для $k = 1,3$. Из графика видно, что коэффициент потерь интенсивно

возрастает с увеличением угла косого скачка и с ростом скорости λ_1 , достигая максимальных значений при $\sigma = \pi/2$ (прямой скачок).

Таким образом, в сверхзвуковом потоке идеальной жидкости появляется особый вид сопротивления – *волновое сопротивление*, зависящее от потерь в скачках, а, следовательно, от формы и интенсивности скачков. Как мы видели форма скачка и его интенсивность зависят от формы тела и скорости обтекания. Учитывая, что при меньшем угле отклонения δ (а, следовательно, и σ) потери в скачке уменьшаются, можно заключить, что остроконечные тела в сверхзвуковом потоке должны обладать меньшим сопротивлением, чем тела, имеющие скруглённую форму.

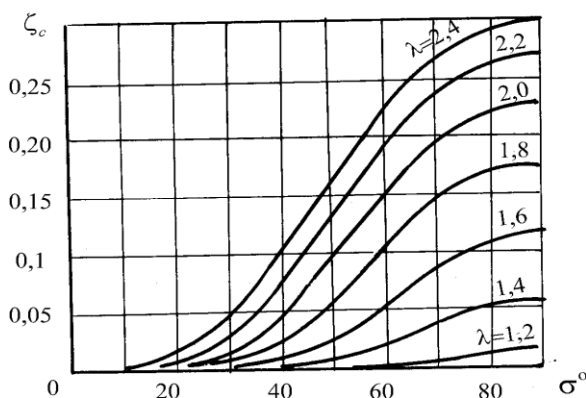


Рис. 8.20 – Коэффициенты потерь в скачке в зависимости от угла σ и скорости невозмущённого потока

Ступенчатое торможение потока. Если при заданных пределах изменение статического давления увеличивать число косых скачков путём увеличения последовательных поворотов стенки, то торможение потока будет более плавным, а суммарные относительные по-

тери будут уменьшаться. Обычно за последним косым скачком располагают прямой скачок, на котором происходит переход к дозвуковой скорости. Для каждой скорости потока λ_1 при заданном числе косых скачков существует оптимальная схема расположения косых скачков, которую можно найти последовательным расчётом.

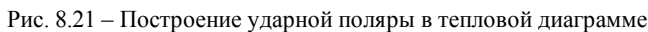
Построение ударной поляры в тепловой диаграмме. По параметрам до скачка p_1 и T_1 находим точку 1 (рис. 8.21) и при известной скорости V_1 точку O_1 . Задаёмся рядом значений σ в пределах от $\sigma = \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{M_1}$ до $\sigma = 90^\circ$.

Для каждого значения σ определяем p_2/p_1 и T_2/T_1 , наносим в i -s диаграмме точки 2_w , 2_s и т.д. до точки A , которая соответствует прямому скачку. Геометрическое место точек 2 даёт состояние газа в координатах i -s, соответствующее ударной поляре. Заметим, что полученная кривая должна быть касательной к линии изоэнтропического изменения состояния O_11 , так как при бесконечно малых возмущениях потока энтропия газа остаётся постоянной.

Для каждой точки кривой (например, $2_s''$) легко определяются: кинетическая энергия за скачком $H_{0k} = V_2^2/2$, изменение потенциальной энергии в скачке H_{0n} и потери кинетической энергии Δh . Вместе с тем здесь можно определить и все параметры скачка: p_2 , T_2 , ρ_2 , p_{02} , Δs и тем самым существенно дополнить ударную поляру, построенную в плоскости годографа. В плоскости годографа ударная поляра даёт кинематическую картину – течения (поле скоростей); в тепловой диаграмме мы получаем характеристики энергетических преобразований на скачке и изменения параметров потока.

$$H_* = i_0 - i_2 = \frac{a_*^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} i_0$$

и откладываем его от линии $i_0 = const$.



272

8.6 Отражение и взаимодействие скачков

В практических задачах косые скачки часто падают на твёрдые границы или на свободную границу струй; иногда волны противоположного семейства пересекаются и, как показано на рисунке 8.6с, два косых скачка одного и того же семейства всегда стремятся пересечься. Мы рассмотрим такие случаи.

Отражение скачка от свободной границы струи. Скачок A (рис. 8.22) падает на границу постоянного давления двухмерного потока. Так как давление в области (2) за скачком больше, чем на свободной границе, очевидно, что расширяющиеся волны B должны отразиться в том месте, где скачок A упадёт на свободную границу. Более того, отражённые волны B должны быть центрированными Прандтль-Майеровскими волнами, так что на свободной границе внезапный подъём в давлении от p_1 до p_2 может мгновенно быть погашен внезапным падением в давлении от p_2 до p_3 . Интенсивность волн разрежения B зависит от интенсивности скачка A путём требования $p_2 - p_1 = p_2 - p_3$.

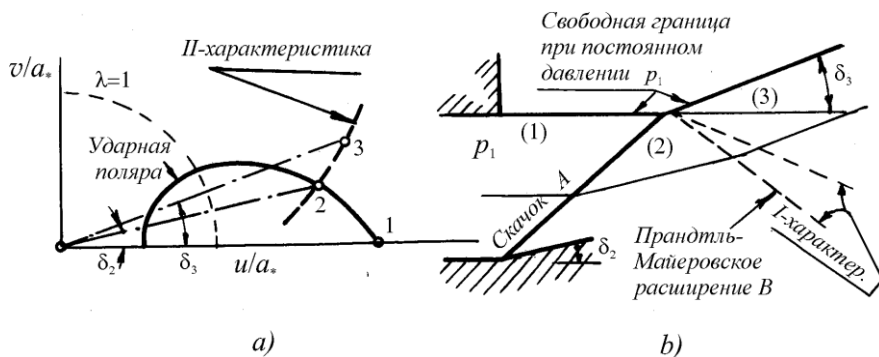


Рис. 8.22 – Отражение скачка от границы постоянного давления:

a) – картина течения в плоскости годографа;

b) – картина течения в физической плоскости

Отражение скачка приводит к деформации границы струи, которая в точке соприкосновения со скачком A отклоняется на угол $\delta_3 > \delta_2$.

Отражение от твёрдой границы. На рисунке 8.23*b* скачок A падает на прямую стенку. Так как поток газа имеет направление твёрдой границы, необходимо, чтобы скачок B отразился так, чтобы течение в области (3) имело то же направление, что и в области (1). Интенсивность скачка B по отношению к A определяется требованием, чтобы они имели равные поворотные углы. Рисунок 8.23*a* показывает, как проблема может быть решена графически с помощью ударных поляр в плоскости годографа, рисунок 8.23*c* показывает решение с помощью $\delta - \bar{p}$ ударных поляр. В обоих этих графических построениях ударная поляра, соответствующая M_2 , смещена на угол δ , чтобы соответствовать действительному направлению потока в области (2).

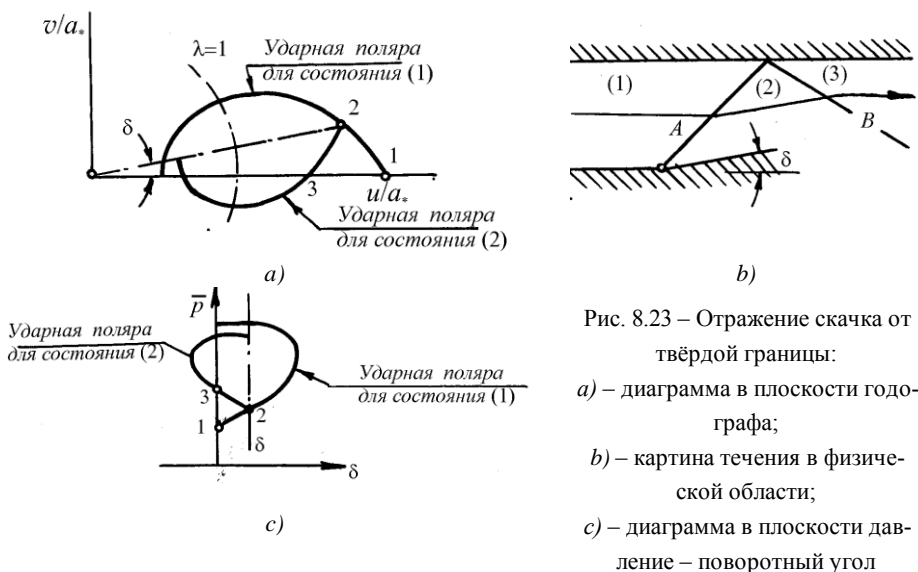


Рис. 8.23 – Отражение скачка от твёрдой границы:

- a*) – диаграмма в плоскости годографа;
- b*) – картина течения в физической области;
- c*) – диаграмма в плоскости давление – поворотный угол

Очевидно из примера, что косой скачок A отражается от твёрдой границы волной B одинаковой по природе со скачком A , то есть отражается так же косым скачком уплотнения.

В практике присутствие пограничного слоя возле верхней стенки делает процесс отражения намного более сложным, чем простое решение, данное здесь.

Изучение рисунков 8.23а и 8.23с показывает, что для данного M_1 имеется максимальная величина поворотного угла δ , для которого тип отражения на рисунке 8.23b, известный как *правильное отражение*, возможен. Можно также сказать, что для данного δ имеется минимальная величина M_1 , ниже которой правильное отражение невозможно.

Когда правильное отражение невозможно, имеет место *отражение Маха* или λ -образный скачок. Возле верхней стенки скачок должен быть прямым, так как это единственная возможность наличия скачка без изменения направления течения.

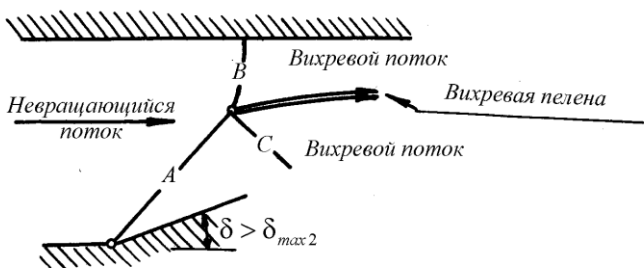


Рис. 8.24 – Отражение Маха

Если δ больше, чем величина δ_{max} , соответствующая M_2 (рис. 8.13), имеет место отражение Маха в виде λ -образного скачка, показанного на рисунке 8.24.

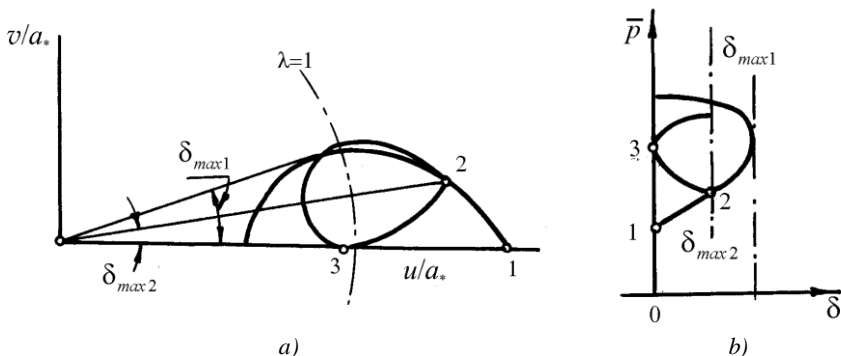


Рис. 8.25 – Диаграммы в плоскости годографа (а) и в плоскости давление – поворотный угол (б) в случае отражения скачка от твёрдой границы при угле поворота потока $\delta = \delta_{max2}$

Скачок C , противоположного семейства скачку A , исходит из соединения падающего скачка A и прямого скачка B . Однако скачки A , B и C не могут быть прямыми в точке взаимного пересечения, по тем же соображениям почему правильное отражение волны A невозможно. В практике мы наблюдаем, что A , B и C искривлены возле соединяющей их точки. Вихревая пелена выходит из точки пересечения и поток за всеми скачками является вращающимся вследствие кривизны скачков. Это течение весьма сложно и настоящих наших знаний недостаточно, чтобы всесторонне рассмотреть все аспекты отражения Маха.

При $\delta = \delta_{max2}$ картина течения остаётся как на рисунке 8.23b, при этом диаграмма годографа и диаграмма давление – угол отклонения потока показаны на рисунках 8.25a и 8.25b соответственно.

Пересечение скачков противоположного семейства. Предположим, что скачки A и B известной интенсивности лежат в области (1) и в дальнейшем встречаются (рис. 8.26a).

Предположим, что C будет продолжением B и D – продолжение A . Рассмотрим две смежные линии тока, которые переходят на другую сторону соединяющей точки; одна линия проходит скачки A и C , а другая – B и D . После прохождения системы скачков линии тока должны иметь *одинаковое давление и направление*. Но так как они проходят через скачки различной интенсивности, энтропия увеличивается неодинаково и, следовательно, они имеют различные скорости. Поверхность разрыва (*вихревая пелена*), которая также является линией тока, исходит из общей точки. Области $4'$ и $4''$ имеют одинаковое направление потока и одинаковое давление, но различные скорости. Вихревая пелена – очень тонкая область сконцентрированных вихрей, иногда называется *линией скольжения*.

Графическое решение этой задачи при помощи диаграмм ударных поляр показано на рисунках 8.26*b* и 8.26*c*. Последняя диаграмма особенно удобна для такого рода задач. На рисунке 8.27 показан процесс пересечения двух косых скачков в тепловой диаграмме $i-s$.

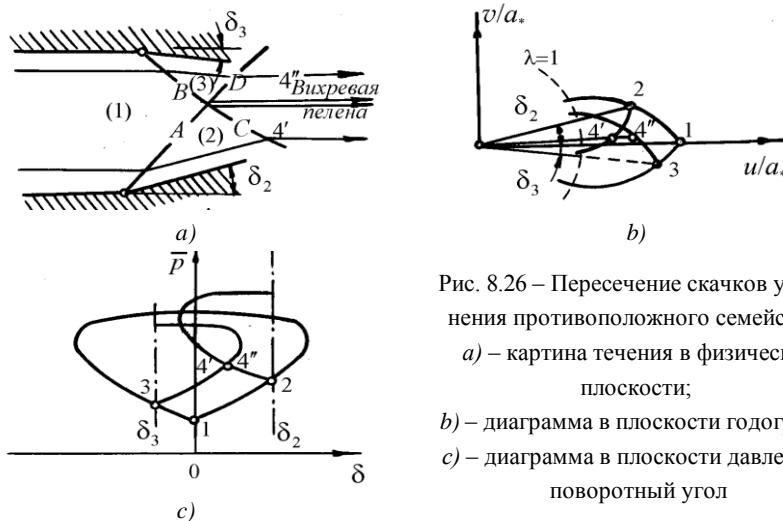


Рис. 8.26 – Пересечение скачков уплотнения противоположного семейства:

- a*) – картина течения в физической плоскости;
- b*) – диаграмма в плоскости годографа;
- c*) – диаграмма в плоскости давление – поворотный угол

Так как поля $4'$ и $4''$ имеют одинаковое давление и одинаковую заторможенную температуру, адиабатные и изоэнтропные соотношения требуют, чтобы поле с более низким давлением торможения (выше энтропия) имело более низкую скорость.

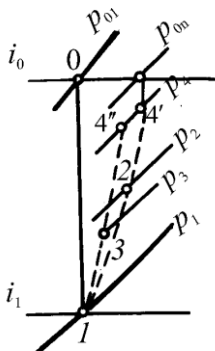


Рис. 8.27 – Пересечение скачков в тепловой диаграмме

В нашем случае скачки A и C имеют большую интенсивность, чем B и D , следовательно скорость газа больше в поле $4''$, чем в поле $4'$.

Если скачки A и B одинаковой интенсивности, то есть $\delta_2 = \delta_3$, тогда конфигурация скачка будет симметрична и никакой линии скольжения не будет. Линия тока, проходящая через точку пересечения, в этом случае не будет изменять на-

правление и картина под этой линией тока будет аналогична рисунку 8.23, то есть отражение скачка от плоской стенки.

Тип правильного отражения, показанный на рисунке 8.26, может быть невозможен, если M_1 очень мало или, если δ_2 и δ_3 очень большие. Отражение Маха тогда имеет место; мы получаем так называемый мостообразный скачок (рис. 8.28).

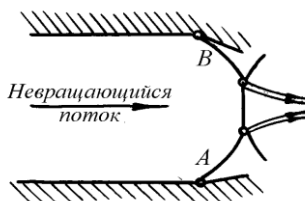


Рис. 8.28 – Отражение Маха в случае двух пересекающихся скачков при больших углах поворота потока δ_2 и δ_3

Пересечение скачков одного семейства. Ссылаясь на рисунок 8.29а, предположим, что M_1 , δ_2 и δ_3 заданы, что определяет углы и интенсивность скачков A и B .

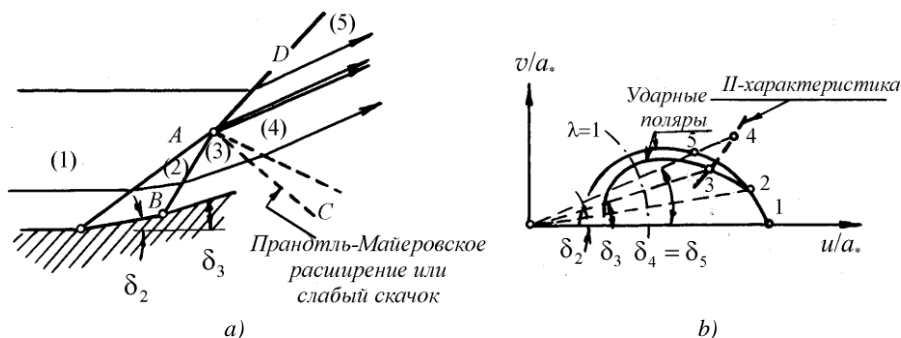


Рис. 8.29 – Пересечение скачков одного семейства:

а) – картина в физической области; б) – диаграмма в плоскости годографа

По соображениям вышесказанным ранее скачок A всегда пересекается со скачком B .

Сначала предположим, что скачки A и B могут быть продолжены только в форме скачка D . В этом случае области (3) и (5) должны иметь одинаковые давление и направление, но различные скорости. Однако давление и направление в области (3) определены начальными данными. Это означает, что скачок D должен быть такой интенсивности, чтобы одновременно удовлетворять требованиям по давлению и направлению, равным области (3). Однако, если поворотный угол D выбрать так, чтобы $\delta_5 = \delta_3$, все другие свойства D немедленно определяются и давление в области (5) не будет равно давлению в области (3) (при прохождении линии тока через два скачка потери будут меньше, чем при прохождении линии тока через один скачок).

Эти рассуждения необходимы, чтобы убедиться, что что-то большее, чем скачок D требуется. Одним из возможных путей, чтобы обойти эту трудность, есть предположение, что волна C , которая может быть или расширением Прандтля-Майера или косым скачком, должна выходить из точки пересечения. Затем соответствующим подбором интенсивности волн C и D возможно получить ре-

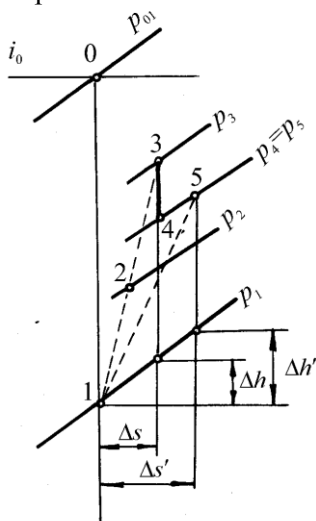


Рис. 8.30 – Пересечение скачков уплотнения одного семейства в тепловой диаграмме

шение, для которого $p_5 = p_4$ и $\delta_4 = \delta_5$. Конечно вихревая пелена разделяет области (4) и (5). Решение в плоскости годографа с волной C , показанной как волна разрежения, приведено на рисунке 8.29b.

Изменение состояния газа вдоль линии тока при переходе через рассматриваемую систему скачков может быть представлено в тепловой диаграмме (рис. 8.30). В точке 2 определяется состояние газа после первого скачка A , а в точке 3 – после второго скачка B .

Точка 5 даёт состояние газа за скачком D , а точка 4 – за волной изэнтропного расширения C . Потери энергии в скачке D выше, чем суммарные потери в скачках A и B , то есть $\Delta s' > \Delta s$. Таким образом, как уже указывалось выше, при заданных пределах изменений давлений торможение потока одним скачком обуславливает большую потерю энергии, чем в случае последовательного торможения двумя скачками.

Криволинейные скачки. Пригодность уравнений скачка. В большинстве практических случаев появляются криволинейные скачки или вследствие того, что скачок отсоединённый (как на рис. 8.14с и рис. 8.15b) или вследствие того, что первоначальный прямой скачок взаимодействует с волнами неразрывности. Могут ли уравнения косого скачка быть применимы для криволинейных скачков? Да, соотношения скачка применимы к каждой индивидуальной линии тока в предположении, что угол скачка σ измеряется между линией тока, входящей на поверхность скачка, и касательной в точке входа в плоскости, содержащей приближающуюся линию тока и нормаль к касательной плоскости.

Взаимодействие скачков и волн неразрывности. Имеется четыре возможных типа таких взаимодействий, зависящих от того, являются ли волны неразрывности волнами сжатия или разрежения и являются ли волны неразрывности одинакового или противоположного семейства с волной скачка.

Для иллюстрации обсудим течение, обтекающее крыло треугольного профиля (рис. 8.31a), в котором косой скачок, исходящий из точки A , взаимодействует с волнами неразрывности – волнами разрежения Прандтля-Майера одинакового семейства, исходящих из точки C . Зная геометрию профиля и начальное число Маха, с помощью соотношений скачка мы можем определить параметры в зонах (1) и (2). Затем, используя метод расчёта по полям, мы можем разбить центрированную волну разрежения на несколько зон, первая из которых есть зона (3). Применяя теорию характеристик для расширения между зонами (2) и (3), мы можем определить свойства потока в зоне (3) и направление первой волны разрежения CB . Таким образом, точка B , представляющая начало процесса взаимодействия, может быть размещена. Теперь обсудим две

линии тока непосредственно выше и ниже B . Вследствие падения давления при переходе из (2) в (3) скачок выше B не будет такой же интенсивности как скачок ниже B , две линии тока будут претерпевать различные изменения в энтропии.

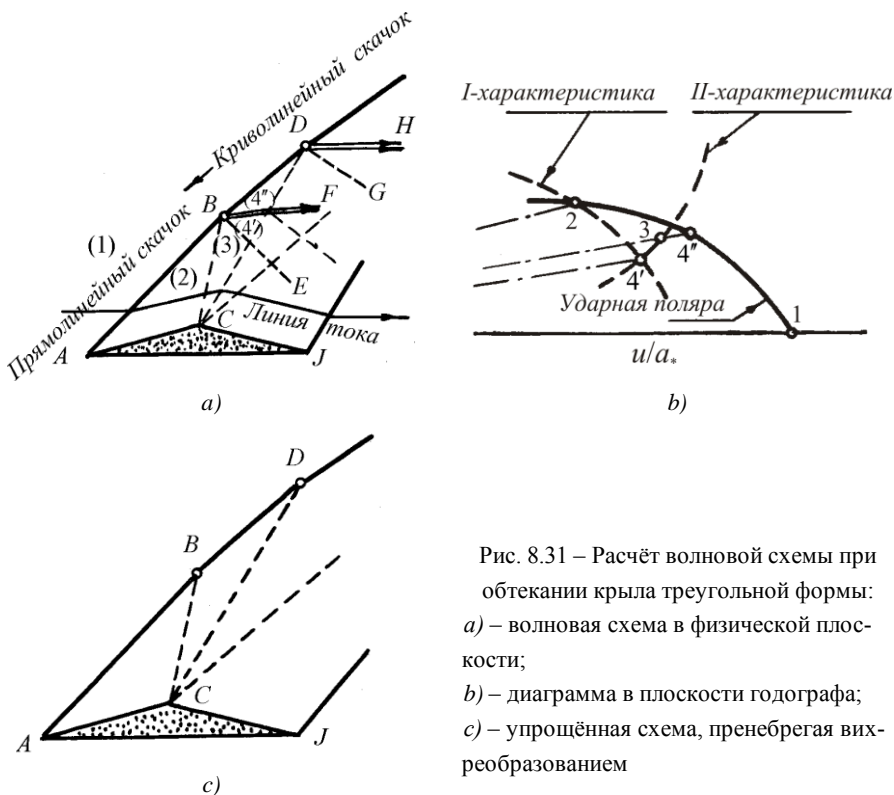


Рис. 8.31 – Расчёт волновой схемы при обтекании крыла треугольной формы:
 а) – волновая схема в физической плоскости;
 б) – диаграмма в плоскости годографа;
 в) – упрощённая схема, пренебрегая вихреобразованием

Для того, чтобы иметь равные давления и направления потока в полях $4'$ и $4''$ небольшая волна разрежения (сжатия) BE должна быть отражена в точке B . Так как скорости различны в полях $4'$ и $4''$, вихревая линия BF выходит из точки B . Интенсивность скачка между B и D и интенсивность отражённой волны BE определяются двумя одновременными условиями, что давление и направления

потока должны быть одинаковыми в зонах $4'$ и $4''$, как показано на рисунке 8.31*b*. Процедура расчёта продолжается аналогично. В том месте, где вторая волна разрежения CD ударяется о скачок BD , скачок снова изменяет интенсивность и направление и вихревая пелена DH и отражённая волна DG появляются. Отражённая волна типа BE взаимодействует с волнами BC и CD и это взаимодействие может быть подсчитано методом характеристик.

Следует заметить также, что когда волна типа CD пересекает вихревую линию BF , она частично проникает сквозь неё, изменив интенсивность, и отражается. Это вытекает из требования, что давление и направление потока должны быть одинаковыми для соседних линий тока, формирующих вихревую пелену (или линию скольжения).

В пределе с малым шагом расчёта скачок будет прямолинейным от A до B и непрерывно криволинейным выше B . Более того, в пределе непрерывного решения нет индивидуальных вихревых линий типа BF , а целая область, ограниченная линией тока BF и криволинейным скачком за B , является вихревой. Вихревые линии просто являются очень удобным приёмом шагового решения, который позволяет нам непрерывно распределённые вихри преобразовать в дискретные разрывности для удобства расчёта.

Метод характеристик изоэнтропийного течения не может быть применён к области, где имеются вихри, так как эта область не изоэнтропийна. Однако в качестве приближённого решения, как показывает опыт, даёт приемлемые результаты. В сущности приближённый метод пренебрегает изменениями энтропии при переходе через различные части косого скачка и, поэтому, вихревые линии и отражённые волны от скачка не появляются. Рисунок 8.31*c* показывает упрощённую картину такого приближённого решения.

В вихревой области, где имеются волны неразрывности, энтропию представляют в качестве дополнительной переменной. В этом случае формально может быть применён метод характеристик.

Скачки, пересекающие вихревую линию. Когда скачок входит в область параллельного потока с переменной скоростью, он преломляется и подвергается частичному отражению.

8.7 Примеры двумерных течений, содержащих скачки

Большинство сверхзвуковых течений включают одновременно и скачки и области волн неразрывности. Несколько примеров нами ниже будут рассмотрены в свете теории характеристик и теории косых скачков.

Образование скачка из волн неразрывности. Когда тело с профилем как $A-B-C-D-E-F$ на рисунке 8.32а размещено в сверхзвуковом потоке, волны сжатия генерируются в каждой точке на вогнутой поверхности.

Эти лучи сходятся и окончательно формируют начало конверта в точке G , в которой косой скачок сжатия начинается. Добавочные волны сжатия, начинающиеся в C , D и т.д. достигают первоначальную волну в H , J и т.д., поглощаются скачком сжатия, усиливая последний. Окончательно все волны сжатия сливаются в один косой скачок, начинающийся в точке L .

Обсудим поглощение первых двух волн в точке G . Давление, скорость и направление потока в полях (2) и (3) определяют по методу характеристик к волнам AG и BG . Последующая волна возле G определяется требованиями, что линия тока, проходящая через скачок непосредственно выше G , заканчивается с таким же давлением и

направлением потока (в поле $4''$) как линия тока, проходящая через две волны сжатия немедленно ниже G (поле $4'$). В общем случае,

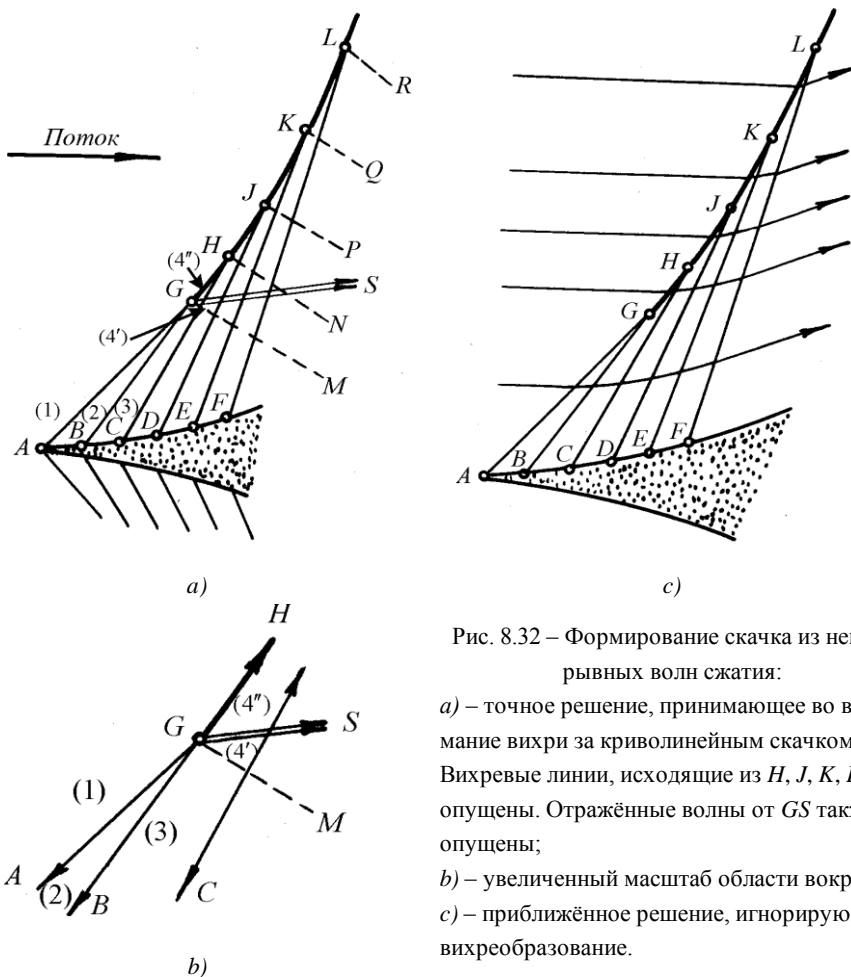


Рис. 8.32 – Формирование скачка из непрерывных волн сжатия:

- a) – точное решение, принимающее во внимание вихри за криволинейным скачком. Вихревые линии, исходящие из H, J, K, L опущены. Отражённые волны от GS также опущены;
 b) – увеличенный масштаб области вокруг G ;
 c) – приближённое решение, игнорирующее вихреобразование.

эти условия могут быть совмещены, если слабая отражённая волна GM возникает; более того, так как поле $4'$ имеет более высокое заторможенное давление, чем поле $4''$, но одинаковое статическое

давление, скорость газа в поле $4'$ будет больше, чем в $4''$ и вихревая линия будет разделять поля $4'$ и $4''$.

Если процедуру расчёта предыдущего параграфа продолжить, находим, что скачок $GHIKL$ искривлён; что имеется система слабых отражённых волн GM , HN и т.д. и что вихревые линии GS и т.д. покрывают область вниз по течению GL , делая эту область сплошь вихревой. Далее, каждая волна, пересекающая вихревую линию, испытывает частичное отражение. Чтобы избежать загромождения рисунка, эти очень слабые отражённые волны не показаны.

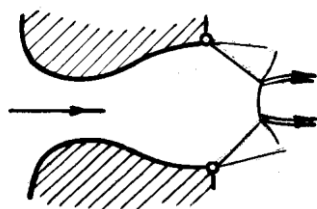
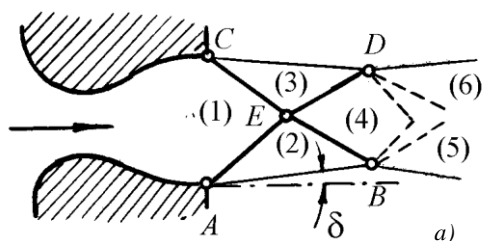
До тех пор, пока скачок не становится достаточно интенсивным, отражённые волны GM , HN и т.д. являются крайне слабыми и разница в скорости при переходе через линию скольжения является весьма малой, что наталкивает на упрощённое решение (рис. 8.32с), в котором изменениями энтропии при переходе через скачок пренебрегаем. Во многих практических случаях упрощённое решение (рис. 8.32с) вполне отвечает требованиям (адекватно). Иногда желательно использовать упрощённую схему (рис. 8.32с) для более слабых отрезков скачка и более строгое решение (рис. 8.32а) для более интенсивных отрезков скачка.

Перерасширенная струя из сопла. Рассмотрим однородную, параллельную, сверхзвуковую, двухмерную струю, покидающую сопло в сечении 1 при давлении ниже, чем область выхлопа, в которую сопло разряжается (рис. 8.33а).

Давление на границах струи должно быть равно давлению области выхлопа. Соответственно, волны косых скачков AE и CE возникают и границы струи поворачиваются на угол δ так, чтобы p_2 и p_3 равнялись давлению в области выхлопа.

Вследствие условий симметрии взаимодействие волн косых скачков AE и CE эквивалентно отражению скачков от плоской

стенки. Интенсивность волн ED и EB определяются условием, что поток имеет одинаковое направление в полях (1) и (4).



b)

Рис. 8.33 – Струя, покидающая сопло перерасширения:
a) – правильное отражение скачков;
b) – отражение Маха скачков.

Давление в поле (4) больше, чем в области выхлопа. Для того, чтобы граница струи оставалась при постоянном давлении, волны скачков ED и EB должны отразиться как центральные волны разрежения Прандтля-Майера, берущие своё начало в точках D и B . Интенсивность волн разрежения определяется условием $p_5 = p_6 = p_2 = p_3$. Поворот границы струи в точках B и D равен приблизительно 2δ , как определяет линеаризованная теория.

В сечении BD мы имеем однородный параллельный поток при давлении большем, чем давление выхлопной области. Начиная с этого сечения ситуация является аналогичной недорасширенной струи, покидающей сопло. Все последующие отражения на границе являются или центральными волнами разрежения, или центральными волнами сжатия и струя идёт через ряд повторяющихся циклических изменений (рис. 7.11a).

Хотя как перерасширенная, так и недорасширенная струи состоят из повторяющихся циклических изменений, первые полцикла перерасширенной струи (область между сечениями AC и BD) никогда не повторяются.

Если давление выхлопа намного больше, чем давление в плоскости выхода, правильное отражение невозможно и отражение типа Маха наблюдается (рис. 8.33*b*). Последующая схема течения весьма трудная для анализа, так как состоит из смешанного дозвукового и сверхзвукового течения и содержит вихревые области.

Струя, покидающая турбинное сопло. Выходная плоскость турбинного сопла обычно размещена под углом к направлению течения. Рисунок 8.33 показывает природу картины течения для такой струи, когда сопло суживающегося типа и поток недорасширен. Давление входа допустим равно 10 *бар* и давление в области выхлопа 2,7 *бар*. Следовательно, звуковой поток существует в горле при давлении 5,3 *бара*. Волновая картина построена для поворотного угла 2° при прохождении через каждую волну, исключая скачок. Увеличением энтропии при прохождении скачка пренебрегаем. Волны расширения показаны пунктирными линиями, а волны сжатия – сплошными линиями.

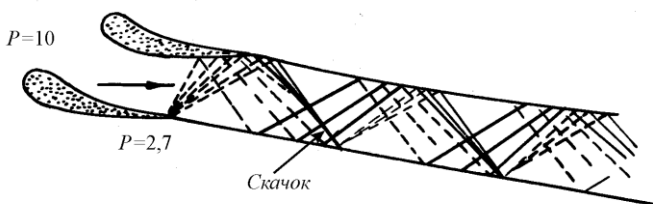


Рис. 8.34 – Струя, покидающая суживающуюся сопловую решётку турбины

Важным результатом, продемонстрированным на рисунке 8.34, является то, что усреднённое направление струи существенно отличается от направления сопла вследствие отклонения струи в косом срезе. Это отклонение уменьшает работу, снимаемую с рабочего колеса.

Вопросы для самопроверки

1. Покажите, что нормальная к фронту косого скачка составляющая скорости за скачком – дозвуковая.
2. Как вычислить отношение давлений и плотностей до и после косого скачка?
3. Определите отношение давлений, плотностей, температур и чисел Маха после и до прямого скачка уплотнения.
4. Сформулируйте правила взаимодействия скачков.
5. Опишите схему построения годографа ударной поляры.
6. Определите изменение энтропии в скачке.
7. Определите потери в скачках уплотнения.
8. Опишите построение «ударной поляры» в тепловой диаграмме.
9. Опишите и объясните отражение и взаимодействие скачков.
10. Дайте физическое описание криволинейных скачков.

Задачи

8.1. В трубе при давлении 1 бар и температуре 40°C течет однородный воздушный поток со скоростью 120 м/с . Конец трубы внезапно закрыли клапаном и волна скачка распространяется в противоположном направлении. Определить скорость распространения волны, а также давление и температуру воздуха, внезапно остановленного.

8.2. Предположим, что ударная волна, вызванная взрывом атомной бомбы распространяется, в воздухе при стандартных атмосферных условиях со скоростью 60000 м/с .

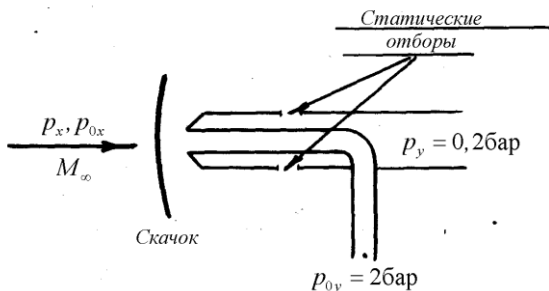
Определить изменение в давлении (МПа), температуре ($^\circ\text{C}$), заторможенном давлении (МПа), заторможенной температуре ($^\circ\text{C}$) и скорости (м/с), вызванное волной по отношению к наблюдателю, неподвижному относительно невозмущенного воздуха.

8.3. Изображенная на рисунке трубка Пито используется для измерения числа Маха M_∞ в сверхзвуковом потоке воздуха. Измеренные трубкой величины полного и статического давлений указаны на рисунке.

Известно, что для применяемой трубки коэффициент давления (относительно невозмущенного потока) по показаниям статических отборов трубки равен 0,1.

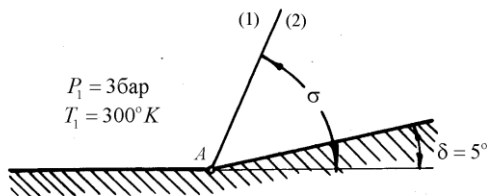
$$C_p = \frac{p_y - p_x}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = 0,1.$$

Определить число Маха невозмущенного потока.



Зад. 8.3

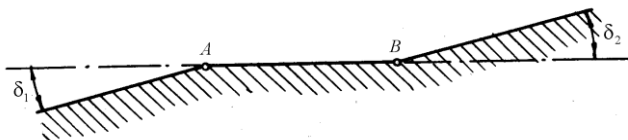
8.4. Поток воздуха обтекает вогнутый тупой угол со скоростью $\lambda_1 = 1,3$. Поворот потока в точке A осуществляется на угол $\delta = 5^\circ$. Определить давление, плотность, температуру и угол наклона скачка σ (параметры определять за скачком), если в невозмущенной области $p_1 = 3 \text{ бар}$ и $T_1 = 300 \text{ К}$.



Зад. 8.4

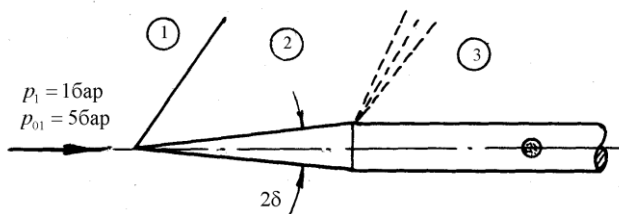
8.5. Поток воздуха, двигаясь вдоль пластины со скоростью $\lambda_1 = 1,45$ испытывает внезапное сжатие за точкой A . При этом давление повышается от 2 бар до $p_2 = 4 \text{ бар}$. Определить безразмерную скорость λ_2 , плотность ρ_2 , температуру T_2 и угол δ потока за точкой A , если в невозмущенной области $t_1 = 30^\circ \text{C}$.

8.6. Поток воздуха движется вдоль стенки, имеющей два последовательных поворота в точках A и B , причем $\delta_1 = 10^\circ$, а $\delta_2 = 5^\circ$. Построить волновую схему, картину течения в плоскости годографа и определить параметры потока (давление, плотность и температуру) в зоне 3, если $p_{01} = 5 \text{ бар}$, $t_0 = 50^\circ\text{C}$, $\lambda_1 = 1$.



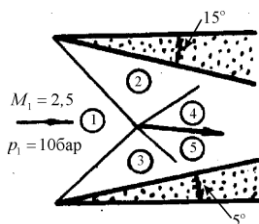
Зад. 8.6

8.7. Найти величину статического давления, показываемого трубкой Прандтля, если истинное статическое давление потока $p_1 = 1 \text{ бар}$, а давление полного торможения $p_{01} = 5 \text{ бар}$. Угол конуса трубки $2\delta = 10^\circ$. Построить картину течения в плоскости годографа.



Зад. 8.7

8.8. Рисунок показывает вход в несимметричный с косыми скачками диффузор. Определить давление и направление потока в полях 4 и 5, если на входе $M_1 = 2,545$, $p_1 = 10 \text{ бар}$.



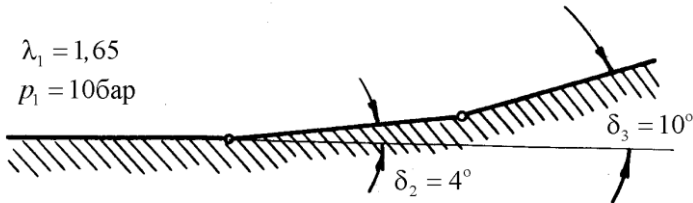
Зад. 8.8

Построить картину течения в плоскости годографа, в плоскости давление - поворотный угол и в $i-s$ диаграмме.

8.9. Скорость потока воздуха перед прямым скачком уплотнения в два раза больше, чем за ним. Найти отношение температур T_2 / T_1 за скачком и перед ним.

8.10. Известны скорость $V_1 = 500 \text{ м/с}$ и температура $T_1 = 300 \text{ К}$ потока воздуха перед прямым скачком уплотнения. Определить скорость V_2 и температуру T_2 в потоке за скачком уплотнения.

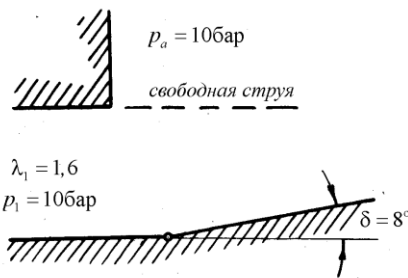
8.11. Построить волновую схему, картину течения в плоскости годографа и в i - s диаграмме и определить параметры потока в областях 4 и 5.



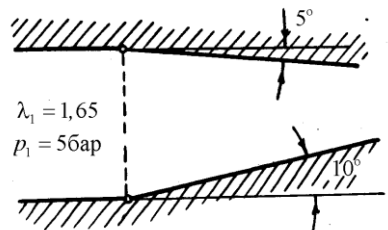
Зад. 8.11

8.12. Построить волновую схему, картину течения в плоскости годографа, i - s диаграмме и определить параметры потока в областях 2 и 3.

8.13. Построить волновую схему, картину течения в плоскости годографа, i - s диаграмме и определить параметры потока в областях 4 и 5 вниз по потоку.



Зад. 8.12



Зад. 8.13

8.14. Скорость потока газа с показателем изоэнтропы $k=1,3$ до прямого скачка V_1 в два раза больше, чем за ним: $V_1 = 2V_2$. Найти числа Маха до прямого скачка уплотнения M_1 и после него M_2 .

8.15. Известны скорость $V_1=800\text{ м/с}$, давление $p_1=1\cdot 10^5\text{ Па}$ и температура воздуха $T_1=300\text{ К}$ перед прямым скачком уплотнения. Найти скорость V_2 , давление p_2 и температуру T_2 за скачком уплотнения.

Найти параметры торможения до скачка (давление p_{01} , температуру T_{01}) и после него (давление p_{02} , температуру T_{02}).

8.16. Степень повышения статического давления в прямом скачке уплотнения $p_2 / p_1=2,5$. Определить числа Маха до скачка M_1 и после него M_2 , если показатель изоэнтропы $k=1,4$.

8.17. Измерены статические давления перед прямым скачком $p_1=0,5\cdot 10^5\text{ Па}$ и за ним $p_2=1,2\cdot 10^5\text{ Па}$.

Найти давление изоэнтропийного торможения перед прямым скачком p_{01} и за ним p_{02} . Показатель изоэнтропы $k=1,4$.

ГЛАВА 9. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Все аналитические выкладки, изложенные ранее, были основаны на гипотезах идеального течения без вязкости и без теплопередачи. Жизненность этих гипотез вытекает из предпосылки существования пограничного слоя, основанной на том, что слагаемые, определяемые вязкостью, в уравнениях количества движения и энергии и слагаемые, определяемые теплообменом, в уравнении энергии являются пренебрежимо малыми по сравнению с остальными слагаемыми в этих уравнениях за исключением узких областей возле твёрдых границ, где скоростной и температурный градиенты настолько большие, что ими нельзя пренебрегать.

Или вкратце, допуская, что число Рейнольдса намного больше единицы, эффектами вязкости и теплообмена можно ограничиться в тонких пограничных слоях возле твёрдых поверхностей (или на внутренних поверхностях между потоками движущимися с раз-

личными скоростями) и можно ими пренебречь в других областях. Обратимся к рассмотрению физической картины обтекания. Допустим, что неподвижное тело, например, профиль крыла, обтекается потоком воздуха (рис. 9.1).

Непосредственные наблюдения показывают, что в тонком слое вблизи поверхности тела происходит резкое нарастание скорости от значения $V = 0$ на поверхности тела до величины порядка скорости набегающего потока. Такой слой воздуха, прилегающий к поверхности обтекаемого тела и представляющий собой область больших значений градиентов скорости по нормали к телу, носит название *пограничного слоя*. Частицы пограничного слоя, пройдя вдоль поверхности обтекаемого тела, уносятся потоком в область, находящуюся за телом, сохраняя на себе следы пребывания в пограничном слое. Это выражается, в частности, в том, что скорости этих частиц, как правило, меньше скорости в окружающей среде. Заторможенные частицы образуют за телом область, называемую *аэродинамическим следом*.

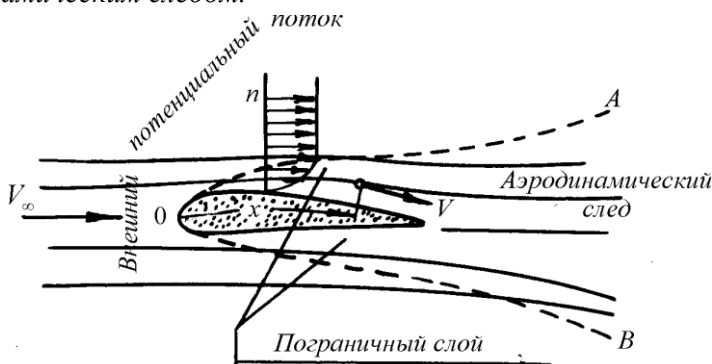


Рис. 9.1 – Схема пограничного слоя

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования, эта область может быть заполнена и отдельными вихрями,

образующимися при обтекании тела. В этом случае область за телом представляет собой так называемый *вихревой след*.

Формула Ньютона для силы внутреннего трения

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \rho \nu \frac{\partial V}{\partial n}$$

показывает, что внутри пограничного слоя и следа, где градиенты скорости значительны, величиной τ – силой внутреннего трения – пренебрегать нельзя, и жидкость, движущуюся внутри пограничного слоя, следует считать вязкой даже при малом значении кинематического коэффициента вязкости ν .

Вне пограничного слоя и следа за телом, где градиенты скорости малы, силой внутреннего трения можно пренебречь, то есть считать жидкость идеальной, а поток жидкости безвихревым (потенциальным).

Таким образом, жидкость вне пограничного слоя и следа можно рассматривать как идеальную и её движение изучать с помощью уравнений Эйлера. Внутри же пограничного слоя жидкость следует рассматривать как вязкую и изучать её движение с помощью дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости – уравнений Навье-Стокса. Ниже мы покажем, что благодаря малой толщине пограничного слоя дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости значительно упрощаются.

9.1 Дифференциальные уравнения пограничного слоя

Допустим, что плоский поток жидкости движется вдоль твердой границы (контур поверхности тела), которую для простоты будем считать прямолинейной и направленной вдоль оси x (рис. 9.2).

Вдоль этой границы образуется пограничный слой AB , толщину которого обозначим через δ . Обычно под толщиной пограничного

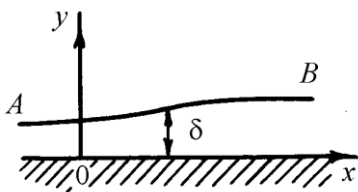


Рис. 9.2 – К выводу дифференциальных уравнений пограничного слоя

слоя δ подразумевают такое расстояние от контура тела, на котором скорость будет отличаться от скорости потенциального потока на 1%.

Так как жидкость внутри пограничного слоя является вязкой, то для

изучения её движения используем дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса), которые для плоского потока несжимаемой жидкости будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Пренебрегая массовыми силами X и Y и присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получим следующую систему дифференциальных уравнений для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Величина входящей в эти уравнения координаты y ограничена в пограничном слое неравенством $0 \leq y \leq \delta$.

Это означает, что величину y можно считать малой величиной порядка δ $y \sim \delta$.

Заметим, что малость δ следует понимать в смысле малого отношения δ/l , где l – характерный размер обтекаемого тела (например, его длина).

Имея это в виду, оценим порядок членов, входящих в уравнения (9.1).

Так как на стенке обтекаемого тела $u = 0$, а на внешней границе слоя u имеет порядок V_∞ , где V_∞ – характерная скорость рассматриваемого течения (например, скорость на бесконечности перед телом), то отсюда следует, что при изменении y от 0 до δ приращение ∂u имеет порядок V_∞ , то есть $\partial u \sim V_\infty$, приращение ∂y имеет порядок δ , то есть $\partial y \sim \delta$, а поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{V_\infty}{\delta}.$$

Аналогично можно показать, что внутри пограничного слоя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{V_\infty}{\delta^2}.$$

Чтобы оценить порядок $\partial u / \partial x$, заметим, что при перемещении вдоль обтекаемого контура на отрезок порядка характерной длины l скорость u может изменяться на величину порядка V_∞ (например, от 0 до V_∞), то есть и в этом случае $\partial u \sim V_\infty$. Так как при этом $\partial x \sim l$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V_\infty}{l}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_\infty}{l^2}.$$

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

приходим к выводу, что $\partial v / \partial y$ имеет тот же порядок, что и $\partial u / \partial x$, то есть

$$\frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{V_\infty}{l}.$$

Поскольку

$$v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy, \text{ то отсюда следует, что } v \approx \int_0^y \frac{V_\infty}{l} dy \approx \frac{V_\infty \delta}{l}.$$

Имея в виду, что на поверхности обтекаемого тела $v = 0$ и зная порядок v в точках внутри слоя, легко определить порядок производных

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{V_\infty \delta}{l^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \approx \frac{V_\infty \delta}{l^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \approx \frac{V_\infty}{l \delta}.$$

Определив порядок скоростей и их производных, входящих в уравнения (9.1), перепишем первое из уравнений (9.1), подписав под каждым членом его порядок:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{V_{\infty}}{l^2} \quad \frac{V_{\infty}}{\delta^2}.$$

Ясно, что в этом уравнении можно отбросить член $\partial^2 u / \partial x^2$, как малый по сравнению с членом $\partial^2 u / \partial y^2$, ибо отношение $V_{\infty} / l^2 : V_{\infty} / \delta^2$ равно δ / l^2 , то есть квадрату малой величины.

Тогда первое уравнение системы (9.1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{V_{\infty}^2}{l} \quad \frac{\nu V_{\infty}}{\delta^2}.$$

Предположим, что внутри пограничного слоя силы вязкости и силы инерции имеют одинаковый порядок. Тогда отношение

$$\frac{V_{\infty}^2}{l} : \frac{\nu V_{\infty}}{\delta^2} = \frac{V_{\infty} \delta^2}{\nu l} = \frac{V_{\infty} l}{\nu} \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 Re,$$

где $Re = \frac{V_{\infty} l}{\nu}$ (число Рейнольдса), должно иметь порядок равный единице

$$\left(\frac{\delta}{l} \right)^2 Re \approx 1.$$

Отсюда следует отношение

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

то есть *порядок толщины пограничного слоя, образующегося при течениях с большими числами Re , равен l / \sqrt{Re} или $\sqrt{\nu l / V_{\infty}}$.*

В первое уравнение (9.1) входят ещё величины $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$.

Будем предполагать, что изменение течения со временем происходит настолько плавно, что порядок $\frac{\partial u}{\partial t}$ не превосходит порядка $\frac{V_{\infty}^2}{l}$, то есть не превосходит порядка основных инерционных

членов. Тогда и член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ должен иметь тот же порядок $\frac{V_{\infty}^2}{l}$.

Перейдём теперь ко второму уравнению (9.1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_{\infty} \delta}{l^3} \quad \frac{V_{\infty}}{l \delta}.$$

Пренебрегая членом $\partial^2 v / \partial x^2$, так как он мал по сравнению с $\partial^2 v / \partial y^2$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2} \quad \frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2} \quad \frac{\nu V_{\infty}}{l \delta}.$$

Так как по сделанному выше допущению силы вязкости имеют тот же порядок, что и силы инерции и полагая, аналогично предыдущему, что $\frac{\partial v}{\partial t}$ имеет порядок основных инерционных членов, то

есть $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2}$, приходим к выводу, что $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ также должен иметь порядок $\frac{V_{\infty}^2 \delta}{l^2}$. Выше было установлено, что $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ имеет порядок

$\frac{V_{\infty}}{l}$. Отсюда следует, что отношение этих градиентов имеет порядок $\frac{\delta}{l}$, то есть градиент давления $\frac{\partial p}{\partial y}$ мал по сравнению с градиентом $\frac{\partial p}{\partial x}$. Поэтому с достаточной степенью точности можно заменить второе уравнение системы (9.1) уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (9.2)$$

Таким образом, *давление внутри пограничного слоя не меняется вдоль нормали к контуру тела и равняется давлению на внешней границе слоя в рассматриваемом месте.*

Этот результат имеет большое практическое значение и подтверждается хорошим совпадением величины давления, подсчитанной по теории потенциального потока, с величиной давления, определенной из эксперимента. Подсчитывая распределение давления теоретически на основе потенциального течения, получаем его значения лишь на верхней границе пограничного слоя, ибо внутри слоя течение не потенциальное. Определяя давление экспериментальным путем (путем дренирования), находим распределение давления на самой поверхности тела. Совпадение закона распределения давления, определенного этими двумя способами, и подтверждает, что давление в пограничном слое по нормали к телу не изменяется.

Это облегчает определение распределения давления внутри пограничного слоя. Действительно, из уравнения (9.2) следует, что распределение давления вдоль слоя совпадает с распределением давления на его границе. Последнее же можно найти, решая задачу о потенциальном обтекании данного тела. Можно также определить

распределение давления вдоль пограничного слоя экспериментально (с помощью дренажа).

Таким образом, из трех уравнений системы (9.1) остаются два уравнения с двумя неизвестными u и v , так как давление $p(x, t)$ может быть заранее определено. Эта система дифференциальных уравнений пограничного слоя для плоского неустановившегося движения имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Для плоского установившегося движения, отбрасывая в первом уравнении член $\frac{\partial u}{\partial t}$ и заменяя частную производную $\frac{\partial p}{\partial x}$ на полную $\frac{dp}{dx}$, так как в этом случае давление p будет функцией только координаты x , получим следующую систему дифференциальных уравнений пограничного слоя:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Система уравнений (9.4) интегрируется при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u = v = 0; \\ \text{при } y = \delta \quad u = V \quad x, \end{aligned}$$

где V_x – распределение скорости на верхней границе пограничного слоя.

Кроме того в случае неустановившегося движения нужно учитывать начальные условия: при $t = 0$ u и v должны обращаться в заданные функции от x и y .

Дифференциальные уравнения (9.3) и (9.4) пограничного слоя получены в предположении, что граница твердого тела плоская. Оказывается, что эти уравнения с достаточной точностью справедливы и для криволинейной границы. В этом случае следует считать ось абсцисс искривленной по контуру тела и отсчитывать абсциссу x по дуге контура тела от какой-нибудь точки, принятой за начало координат, а ординату y – по нормали к поверхности тела.

Следует отметить, что дифференциальные уравнения пограничного слоя в форме (9.3) и (9.4) пригодны лишь для изучения ламинарного движения в пограничном слое. Для изучения турбулентного движения в пограничном слое они неприменимы, так как при турбулентном течении строго задать начальные и граничные условия невозможно. К этому следует добавить, что самые ничтожные отклонения от поставленных начальных граничных условий могут привести к значительным изменениям в решении уравнений.

Дифференциальные уравнения для осредненного турбулентного движения могут быть получены, например, из уравнений (9.3) путём их осреднения.

Решение дифференциальных уравнений движения ламинарного пограничного слоя (9.3) и (9.4), несмотря на то, что они проще общих уравнений движения вязкой жидкости, всё же достаточно сложно даже для простейших контуров.

В связи с этим приобретает большое значение приближённый метод решения задач пограничного слоя, основанный на рассмотре-

нии так называемого интегрального соотношения пограничного слоя, являющегося математическим выражением теоремы о количестве движения.

9.2 Интегральное соотношение пограничного слоя

Выделим в пограничном слое бесконечно малую площадку $ABCD$ (рис. 9.3), ограниченную элементом BD твердой границы, которую примем за ось x , элементом AC верхней границы пограничного слоя и прямыми AB и CD , отстоящими друг от друга на расстоянии dx .

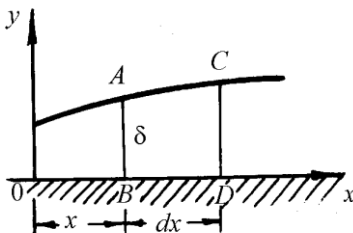


Рис. 9.3

На рис. 9.3 δ представляет толщину пограничного слоя при местном значении x .

Определим контрольный объем как показано на рис. 9.4а пунктиром, где верхняя его граница параллельна обтекаемой твердой границе и находится вне границы пограничного слоя.

Через участок AB (рис. 9.3) за единицу времени будет втекать количество жидкости равное $\int_0^{\delta} \rho u dy$ (рис. 9.4b). На расстоянии dx через участок DC равный $\delta + d\delta$ будет вытекать количество жидкости равное втекаемому через участок AB ($\int_0^{\delta} \rho u dy$) плюс изменение

количества жидкости вдоль оси x равно $\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$, то есть

$$\int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx.$$

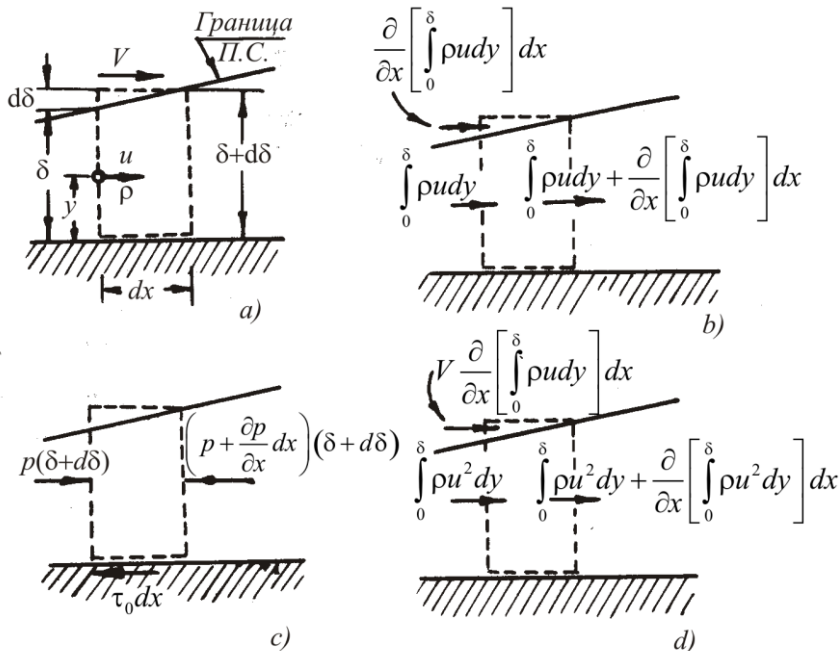


Рис. 9.4 – К выводу интегрального соотношения пограничного слоя

В силу условия неразрывности для несжимаемой жидкости через участок $d\delta$ должно втекать количество жидкости равное

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx \text{ (рис. 9.4b).}$$

Изменение количества движения жидкости, проходящей через контрольный объем за единицу времени равно (рис. 9.4d)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx - V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx. \quad (9.5)$$

Применяя к выделенному пунктиром на рис. 9.4 контрольному объему теорему о количестве движения, получаем, что действующие на контрольную поверхность силы (рис. 9.4с) равны изменению количества движения, проходящей через контрольный объем жидкости

$$\sum F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \delta + d\delta - \tau_0 dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx - V \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$$

Пренебрегая величиной второго порядка малости $\frac{\partial p}{\partial x} dx d\delta$ и сокращая на dx , получаем искомое *интегральное соотношение пограничного слоя* для случая плоского установившегося движения.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0. \quad (9.6)$$

Заменяя частные производные полными, получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0. \quad (9.7)$$

Следует отметить, что соотношение (9.6) и (9.7) являются более общими, чем системы (9.3) и (9.4) дифференциальных уравнений, и пригодны для изучения не только ламинарного, но и турбулентного (осредненного) движения жидкости внутри пограничного слоя, так как при их выводе не делалось никаких предположений о природе касательного напряжения τ_0 .

Входящие в интегральное соотношение пограничного слоя величины V , $\partial p/\partial x$ и плотность ρ можно рассматривать как известные величины, и тогда неизвестными будут только u , δ и τ_0 .

Действительно, скорость V потенциального потока вне пограничного слоя можно найти путем решения задачи о потенциальном обтекании или с помощью эксперимента, а по известному V легко определить и значение $\partial p/\partial x$. Покажем это на примере установившегося движения.

Так как движение вне пограничного слоя потенциальное, то для верхней границы пограничного слоя можно написать уравнение Бернулли

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = \text{const}.$$

Дифференцируя по x , находим

$$\frac{dp}{dx} + \rho V \frac{dV}{dx} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx},$$

то есть получаем выражение dp/dx через известную функцию $V(x)$.

Таким образом, величины V , dp/dx и плотность ρ действительно можно считать известными. Так как в уравнение (9.7) входят три неизвестные величины u , δ и τ_0 , то для их определения необходимо иметь еще два дополнительных соотношения, связывающих эти неизвестные величины. В качестве таких соотношений обычно принимаются закон распределения скоростей по высоте пограничного слоя и зависимость касательного напряжения от толщины слоя.

Часто, вместо того, чтобы искать функцию распределения скорости $u = f(y)$, задают вид этой функции. Если характер распределения скорости $u = f(y)$ внутри пограничного слоя, определяемый видом функции $u = f(y)$, задан правильно, то получится хорошее приближение как для зависимости $\delta = \delta(x)$, так и для коэффициента сопротивления трения.

9.3 Расчет ламинарного, турбулентного и смешанного пограничного слоя для плоской пластинки

Расчет ламинарного пограничного слоя для плоской пластинки. В качестве примера применения интегрального соотношения пограничного слоя к решению практических задач рассмотрим задачу об обтекании пластинки плоским установившимся потоком несжимаемой жидкости.

Решение задачи об обтекании плоской пластинки играет в теории сопротивления трения большую роль. Пластика, поставленная вдоль потока, является простейшим удобообтекаемым телом, сопротивление которого зависит исключительно от касательных напряжений. Найденные для пластинки зависимость $\delta = \delta(x)$ и величина коэффициента сопротивления трения могут быть использованы при приближенных расчетах обтекания других удобообтекаемых тел, например, тонких профилей.

Допустим, что плоский поток, текущий со скоростью $V_\infty = const$ обтекает пластинку длиной l (рис. 9.5). Сверху и снизу пластинки будет образовываться пограничный слой, толщина ко-

торого δ будет функцией координаты x , отсчитываемой от передней кромки 0 пластинки.

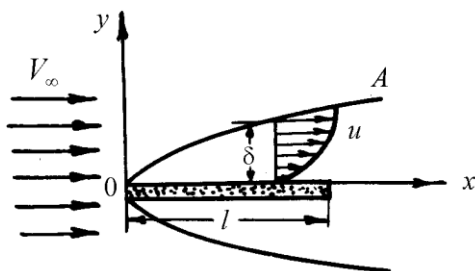


Рис. 9.5 – Ламинарный пограничный слой на плоской пластине

Задача сводится к следующему. Зная *кинематический* коэффициент вязкости ν жидкости, скорость V_∞ набегающего потока и длину пластинки l определить:

1. закон изменения толщины пограничного слоя, то есть функцию $\delta = \delta(x)$;
2. силу сопротивления трения $F_{тр}$.

Для решения задачи обратимся к интегральному соотношению пограничного слоя (9.7) для установившегося течения

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy - V \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае внутри пограничного слоя $dp/dx = 0$. Выше было установлено, что на верхней границе пограничного слоя

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx}.$$

Так как в рассматриваемом случае $V = V_{\infty} = \text{const}$, то $dV/dx = 0$ и $dp/dx = 0$ следовательно $p = \text{const}$ на верхней границе слоя. Но давление p внутри пограничного слоя по нормали к поверхности тела не изменяется, и, следовательно, $p = \text{const}$ и $dp/dx = 0$ и внутри пограничного слоя. Таким образом, интегральное соотношение (9.7) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\tau_0. \quad (9.8)$$

Для того, чтобы вычислить толщину пограничного слоя и силу сопротивления, приложенную к пластинке, требуется еще два дополнительных соотношения, в качестве которых можно взять:

1. закон распределения скорости u по толщине слоя и
2. уравнение, связывающее касательное напряжение на поверхности тела τ_0 с толщиной слоя δ .

Приступая к составлению первого дополнительного уравнения – закона изменения скорости u по высоте слоя y , поступим следующим образом. Вместо того, чтобы искать истинный закон распределения скорости $u = u(y)$, зададим вид функции $u = u(y)$. Положим, что u выражается через y следующим многочленом третьей степени:

$$u = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (9.9)$$

где a , b , c и d – неизвестные пока коэффициенты.

Для их определения обратимся к граничным условиям. Граничные условия будут двух родов: кинематические, налагаемые на скорости на границах пограничного слоя, и динамические, налагаемые на силы внутреннего трения. Составим эти граничные условия.

1. Так как на нижней границе пограничного слоя скорость равна нулю, то

$$u_{y=0} = 0.$$

2. На верхней границе слоя скорость u становится равной скорости V_∞ потенциального потока. Следовательно

$$u_{y=\delta} = V_\infty.$$

3. На верхней границе пограничного слоя сила внутреннего трения $\tau = \mu \partial u / \partial y$ обращается в нуль. Поэтому

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0.$$

4. Для определения четвертого граничного условия обратимся к дифференциальным уравнениям пограничного слоя.

Из первого уравнения системы (9.4) следует, что на нижней границе пограничного слоя

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

(так как при $y=0$ скорости $u=v=0$). Но так в нашем случае $dp/dx=0$, то, следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Указанные четыре граничных условия позволяют определить величины четырех коэффициентов a , b , c и d :

$$a=0, \quad b=\frac{3}{2} \frac{V_\infty}{\delta}, \quad c=0, \quad d=-\frac{V_\infty}{2\delta^3}.$$

Из первого граничного условия при $y = 0$, $u = 0$ получаем $a = 0$.

Из второго граничного условия

$$V_{\infty} = b\delta + c\delta^2 + d\delta^3. \quad (9.10)$$

Из третьего граничного условия, так как $\frac{\partial u}{\partial y} = b + 2cy + 3dy^2$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 = b + 2c\delta + 3d\delta^2. \quad (9.11)$$

Из четвертого граничного условия, так как $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c + 6dy$, то

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 = 2c, \quad c = 0.$$

Из (9.11) имеем $b = -3d\delta^2$, подставляя в (9.10), получаем

$$V_{\infty} = -3d\delta^3 + d\delta^3 = -2d\delta^3.$$

Откуда

$$d = -\frac{V_{\infty}}{2\delta^3}, \quad b = \frac{3}{2} \frac{V_{\infty}}{\delta}.$$

Следовательно, закон распределения скорости $u = u$ у принимает следующий вид

$$u = \frac{V_{\infty}}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right). \quad (9.12)$$

Итак, первое необходимое соотношение найдено. Второе дополнительное соотношение найдем, используя закон Ньютона для внутреннего трения (при ламинарном течении):

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Так как в данном случае по формуле (9.12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{V_{\infty}}{2\delta} \left(3 - \frac{3y^2}{\delta^2} \right),$$

то

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \mu \frac{V_{\infty}}{\delta}. \quad (9.13)$$

После подстановки в интегральное соотношение (9.8) найденных выражений для скорости u и касательного напряжения τ_0 получим дифференциальное уравнение, содержащее одну неизвестную величину δ , решая которое найдем $\delta = \delta(x)$.

Действительно, с помощью выражения (9.12) для скорости u легко вычислить интегралы, входящие в интегральное соотношение (9.8):

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \rho u dy &= \int_0^{\delta} \rho \frac{V_{\infty}}{2\delta} \left(3y - \frac{y^3}{\delta^2} \right) dy = \frac{3}{2} \rho \frac{V_{\infty}}{\delta} \int_0^{\delta} y dy - \\ &- \rho \frac{V_{\infty}}{2\delta^3} \int_0^{\delta} y^3 dy = \frac{3}{2} \rho \frac{V_{\infty}}{\delta} \frac{\delta^2}{2} - \rho \frac{V_{\infty}}{2\delta^3} \frac{\delta^4}{4} = \frac{5}{8} \rho V_{\infty} \delta; \\ \int_0^{\delta} \rho u^2 dy &= \rho \frac{V_{\infty}^2}{4\delta^2} \int_0^{\delta} \left(9y^2 - 6\frac{y^4}{\delta^2} + \frac{y^6}{\delta^4} \right) dy = \\ &= \rho \frac{V_{\infty}^2}{4\delta^2} \left(3\delta^3 - \frac{6}{5}\delta^3 + \frac{1}{7}\delta^3 \right) = \frac{17}{35} \rho V_{\infty}^2 \delta. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения интегралов в соотношение (9.8), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{17}{35} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{5}{8} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = -\frac{3}{2} \mu \frac{V_{\infty}}{\delta},$$

которое после упрощений примет следующий вид

$$\frac{13}{140} \rho V_{\infty} \delta d\delta = \mu dx.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{13}{280} \rho V_{\infty} \delta^2 = \mu x + C.$$

Так как при $x = 0$ толщина $\delta = 0$, то, очевидно, $C = 0$. Следовательно

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}}$$

или

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{V_{\infty}}}. \quad (9.14)$$

Из формулы (9.14) следует, что внешняя граница пограничного слоя представляет собой параболу второй степени; толщина δ пограничного слоя растет с увеличением x и убывает с ростом скорости V_{∞} набегающего потока.

Более точные методы дают следующую зависимость для закона изменения δ

$$\delta = 5,8 \sqrt{\frac{\nu x}{V_{\infty}}}.$$

Как видим, задание закона изменения скорости в виде параболы третьей степени приводит к сравнительно небольшой ошибке.

Определим силу сопротивления трения F_{mp} , действующую на одну сторону пластинки шириной b .

На единицу поверхности пластинки действует сила

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{V_\infty}{\delta}.$$

Следовательно, при ламинарном течении в пограничном слое касательные напряжения пропорциональны $V_\infty^{1,5}$, в чем легко убедиться, подставив в формулу для τ_0 значение δ по формуле (9.14).

На элементарную площадку $dS = bdx$ будет действовать сила

$$\tau_0 dS = \tau_0 bdx,$$

откуда полная сила трения, действующая на одну сторону пластины,

$$F_{mp} = \int_0^l \tau_0 bdx$$

или

$$F_{mp} = \int_0^l \mu \frac{3}{2} \frac{V_\infty}{\delta} bdx.$$

Подставляя значения δ по формуле (9.14), находим,

$$F_{mp} = \frac{3b}{4,64 \cdot 2} \sqrt{\mu \rho V_\infty^3} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

или

$$F_{mp} = \frac{1,3b}{2} \sqrt{\mu \rho V_\infty^3} l. \quad (9.15)$$

Умножая числитель и знаменатель на $\rho l V_\infty^2$, будем иметь

$$F_{mp} = 1,3 \sqrt{\frac{\nu}{V_\infty l}} \frac{\rho V_\infty^2 b l}{2}$$

или

$$F_{mp} = \frac{1,3}{\sqrt{Re}} \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} S,$$

где $Re = \frac{V_{\infty} l}{\nu}$; площадь $S = b \cdot l$.

Коэффициент сопротивления плоской пластины

$$C_{x\ mp} = \frac{F_{mp}}{\frac{\rho V_{\infty}^2}{2} S}$$

и, следовательно, для случая ламинарного пограничного слоя

$$C_{x\ mp} = \frac{1,3}{\sqrt{Re}}. \quad (9.16)$$

Таким образом, коэффициент сопротивления пластинки зависит от числа Re и изменяется обратно пропорционально корню квадратному из этого числа.

Выше мы рассмотрели практическое использование интегрального соотношения (9.7) для случая ламинарного пограничного слоя. Перейдем к рассмотрению турбулентного пограничного слоя.

Расчёт турбулентного пограничного слоя для плоской пластинки. В случае турбулентного течения в пограничном слое изложенный в предыдущем параграфе способ нахождения двух дополнительных уравнений к основному интегральному соотношению непригоден, так как он основан на использовании уравнений (9.4), которые, как уже отмечалось, неприменимы к турбулентному пограничному слою. Поэтому в случае турбулентного течения в пограничном слое два дополнительных уравнения необходимо находить иным способом.

Так как законы турбулентного движения наиболее полно исследованы для движения жидкости по трубам, то в качестве необ-

ходимых двух дополнительных уравнений к интегральному соотношению можно использовать результаты теории течения жидкости по трубам.

Вводя гипотезу о тождественности законов распределения скорости по толщине пограничного слоя плоской пластинки и по радиусу круглой цилиндрической трубы, можно принять, что изменение скорости внутри пограничного слоя пластинки определяется зависимостью

$$u = V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (9.17)$$

именуемой законом одной седьмой.

Это будет первым дополнительным уравнением к интегральному соотношению.

Вторым дополнительным уравнением будет зависимость между величиной касательного напряжения τ_0 , толщиной пограничного слоя δ и скоростью V_{∞} набегающего потока.

Эту зависимость, продолжая аналогию между турбулентным течением жидкости по трубе и вдоль плоской пластинки, можно принять в виде

$$\tau_0 = 0,0225 \rho V_{\infty}^2 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (9.18)$$

Установив два дополнительных необходимых уравнения, обратимся к интегральному соотношению (9.8)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy = -\tau_0.$$

Вычислим входящие в это соотношение интегралы

$$\int_0^{\delta} \rho u dy = \int_0^{\delta} \rho V_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} dy = \rho \frac{V_{\infty}}{\delta^{\frac{1}{7}}} \int_0^{\delta} y^{\frac{1}{7}} dy = \frac{7}{8} \rho V_{\infty} \delta ;$$

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy = \int_0^{\delta} \rho V_{\infty}^2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{2}{7}} dy = \rho \frac{V_{\infty}^2}{\delta^{\frac{2}{7}}} \int_0^{\delta} y^{\frac{2}{7}} dy = \frac{7}{9} \rho V_{\infty}^2 \delta .$$

Подставляя найденные значения интегралов в соотношение (9.8), будем иметь

$$\frac{7}{72} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = \tau_0 . \quad (9.19)$$

Подставляя значение τ_0 по (9.18), получим

$$\frac{7}{72} \rho V_{\infty}^2 \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \rho V_{\infty}^2 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

или

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0,0225 \left(\frac{v}{V_{\infty} \delta} \right)^{\frac{1}{4}} .$$

Разделяя переменные, приведем уравнение к виду

$$\delta^{\frac{1}{4}} d\delta = 0,0225 \frac{72}{7} \left(\frac{v}{V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{4}} dx .$$

Интегрируя и определяя произвольную постоянную $C = 0$ из условия: при $x = 0$ толщина $\delta = 0$, после простых преобразований получим

$$\delta = 0,37 \left(\frac{v}{V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{5}} x . \quad (9.20)$$

Из полученного выражения следует, что толщина турбулентного пограничного слоя нарастает более интенсивно, чем ламинарно-

го, ибо в этом случае величина δ пропорциональна $x^{4/5}$ (в ламинарном слое δ была пропорциональна $x^{1/2}$).

Этот вывод физически легко объясним, так как перемешивание частиц, имеющее место в турбулентном слое, способствует более интенсивному его росту.

Определим силу сопротивления трения F_{mp} . Используя выражение (9.19), будем иметь

$$F_{mp} = \int_0^l \tau_0 b dx = \int_0^l b \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} dx = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 b \int_0^{\delta l} d\delta = \frac{7}{72} \rho V_\infty^2 b \delta l.$$

Так как из выражения (9.20) следует, что

$$\delta l = 0,37 \left(\frac{v}{V_\infty l} \right)^{1/5} \cdot l,$$

то для коэффициента $C_{x mp}$, равного

$$C_{x mp} = \frac{F_{mp}}{\frac{\rho V_\infty^2}{2} S},$$

где $S = bl$, будем иметь

$$C_{x mp} = 0,072 \left(\frac{v}{V_\infty l} \right)^{1/5}$$

или

$$C_{x mp} = \frac{0,072}{Re^{0,2}}. \quad (9.21)$$

Зависимость коэффициентов сопротивления от числа Re удобно изображать в логарифмических координатах, в качестве которых принимают $lg Re$ и $lg C_{x mp}$ (рис. 9.6). При этом зависимость $C_{x mp}$ для ламинарного пограничного слоя изобразится прямой 1:

$$\lg C_{x\text{ mp}} = \lg 1,3 - \frac{1}{2} \lg Re$$

с угловым коэффициентом $-1/2$, а зависимость $C_{x\text{ mp}}$ для турбулентного пограничного слоя прямой 2:

$$\lg C_{x\text{ mp}} = \lg 0,072 - \frac{1}{5} \lg Re$$

с угловым коэффициентом $-1/5$.

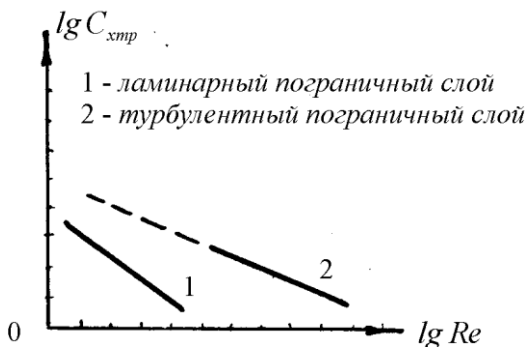


Рис. 9.6 – Зависимость коэффициентов сопротивления плоской пластины от числа Re

Как видим, в обоих случаях с увеличением числа Re коэффициент сопротивления убывает, но при турбулентном слое значительно медленнее, чем при ламинарном.

Как показывают опыты, более точно коэффициент сопротивления пластинки в случае турбулентного пограничного слоя выражается формулой

$$C_{x\text{ mp}} = \frac{0,074}{Re^{0,2}}.$$

В пределах $10^6 \leq Re \leq 10^9$ часто пользуются следующей формулой

$$C_{x\,mp} = \frac{0,455}{\lg Re^{2,58}}.$$

Как видим теория хорошо подтверждается экспериментом.

В большинстве случаев для расчета пограничного слоя используют интегральное соотношение (9.7), а не уравнения (9.4), так как последние, являясь дифференциальными уравнениями в частных производных, более сложны, чем интегральное соотношение, которое, как было показано, легко приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Однако следует отметить, что при использовании интегрального соотношения всегда приходится задаваться законом распределения скоростей в пограничном слое в том или ином виде.

Расчет смешанного пограничного слоя для плоской пластинки. Характер пограничного слоя, образующегося при обтекании потоком жидкости плоской пластинки, существенно зависит от режима обтекания, определяемого числом Re . При сравнительно небольших числах Re вдоль всей пластинки образуется ламинарный пограничный слой, расчет которого нами рассмотрен выше.

При очень больших значениях числа Re практически вдоль всей пластинки образуется турбулентный пограничный слой. Этот случай также нами рассмотрен выше. В диапазоне значений чисел Re от $Re = 10^5$ до $Re = 5 \cdot 10^6$ в начале пластинки образуется ламинарный пограничный слой, который, начиная с некоторого места, разрушается и переходит затем в чисто турбулентный слой (рис. 9.7).

Сделаем два упрощающих предположения:

а) переход от ламинарного пограничного слоя к турбулентному происходит мгновенно в точке A ;

б) изменение толщины турбулентного слоя, распределение скоростей и касательных напряжений в нем, аналогично тому, которое было бы если бы турбулентный слой начинался не от точки A , а от передней кромки 0 .

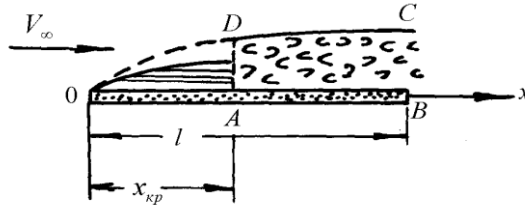


Рис. 9.7 – Расчётная схема смешанного пограничного слоя на плоской пластине

Обозначим через F''_{mp} силу трения всей пластины длиной l , в предположении, что пограничный слой на всем ее протяжении турбулентный. Тогда чтобы получить силу трения F_{mp} для смешанного слоя, нужно из F''_{mp} вычесть силу трения переднего участка слоя OA , считая его турбулентным, и прибавить к полученной разности силу трения этого же участка OA , считая его ламинарным, то есть

$$F_{mp} = F''_{mp} - F''_{mp\ OA} + F'_{mp\ OA}$$

где $F'_{mp\ OA}$ – сила трения ламинарного участка OA .

Силу трения переднего участка пластины шириной b при ламинарном пограничном слое можно написать в виде

$$C'_{x\ mp} \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} x_{kp} b,$$

а при турбулентном слое в виде

$$C''_{x\ mp} \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} x_{kp} b.$$

Разность

$$\begin{aligned}\Delta F_{mp} &= -F''_{mp \text{ } OA} + F'_{mp \text{ } OA} = -C''_{x \text{ } mp} \rho \frac{V_\infty^2}{2} x_{кр} b + C'_{x \text{ } mp} \rho \frac{V_\infty^2}{2} x_{кр} b = \\ &= -\rho \frac{V_\infty^2}{2} C''_{x \text{ } mp} - C'_{x \text{ } mp} x_{кр} b.\end{aligned}$$

Разделим обе части этого равенства на $\rho \frac{V_\infty^2}{2} lb$. Тогда для изменения $C_{x \text{ } mp}$ пластинки от наличия ламинарного участка будем иметь

$$\Delta C_{x \text{ } mp} = -\frac{C''_{x \text{ } mp} - C'_{x \text{ } mp}}{l} x_{кр} = -\frac{C''_{x \text{ } mp} - C'_{x \text{ } mp}}{\frac{V_\infty l}{v}} \frac{x_{кр} V_\infty}{v} = -\frac{A}{Re},$$

где через A обозначена следующая величина

$$A = C''_{x \text{ } mp} - C'_{x \text{ } mp} \frac{x_{кр} V_\infty}{v} = C''_{x \text{ } mp} - C'_{x \text{ } mp} Re_{кр}$$

и число $Re_{кр} = x_{кр} V_\infty / v$ принято называть *критическим*.

Опытным путем установлено, что для гладких пластин величина $A = 1700$. При увеличении шероховатости пластинки или степени турбулентности набегающего потока уменьшается критическое число Re и величина A . Для шероховатых пластин $A = 300$. Следовательно,

$$300 \leq A \leq 1700.$$

Таким образом, для величины коэффициента трения плоской пластинки в случае смешанного пограничного слоя получаем следующее выражение:

$$C_{x \text{ } mp} = \frac{0,074}{Re^{0,2}} - \frac{A}{Re} \quad (9.22)$$

или

$$C_{x\text{ тр}} = \frac{0,455}{\lg Re^{2,58}} - \frac{A}{Re}.$$

Из изложенного следует, что сопротивление трения пластинки будет тем меньше, чем больше длина ламинарного участка пограничного слоя, то есть чем дальше точка A перехода ламинарного слоя в турбулентный отстоит от передней кромки пластинки. Мы приходим к выводу, что с целью уменьшения сопротивления трения профиля выгодно иметь на нем возможно больший участок ламинарного пограничного слоя.

По этому принципу сконструированы специальные крыловые профили (так называемые ламинаризованные профили).

9.4 Пограничный слой на криволинейной поверхности

Выше рассматривался пограничный слой около прямолинейной поверхности. В этом случае скорость потока вне пограничного слоя вдоль всей оси x была постоянной.

При обтекании криволинейной поверхности скорость V на внешней границе пограничного слоя будет величиной переменной, зависящей от координаты x . Давление в пограничном слое криволинейной поверхности также будет функцией x , что следует из уравнения Бернулли, примененного к внешней границе слоя.

Рассмотрим поток, обтекающий криволинейную поверхность, например, профиль крыла (рис. 9.8).

Так как на верхней поверхности профиля скорость вначале возрастает (до некоторой точки M), а затем убывает, то давление на основании уравнения Бернулли вначале уменьшается, а затем растет. В точке M скорость будет максимальна, а давление минимально.

Следовательно, частицы жидкости в пограничном слое около рассматриваемой криволинейной поверхности будут двигаться при наличии градиента давления $\partial p / \partial x$ как отрицательного, так и положительного по знаку.



Рис. 9.8 – Пограничный слой на профиле крыла

Этот факт существенно отличает пограничный слой около криволинейной поверхности от пограничного слоя вдоль плоской пластинки, где $\partial p / \partial x = 0$.

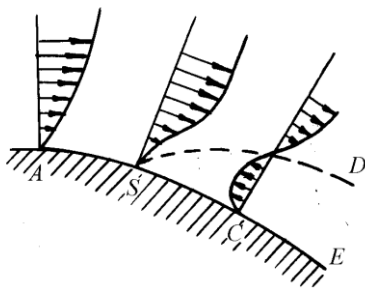


Рис. 9.9 – Эпюры распределения касательных скоростей около криволинейной поверхности

Учитывая эту особенность пограничного слоя около криволинейной поверхности, можно выяснить причины отрыва потока от обтекаемого тела и образования вихрей, срывающихся с обтекаемой поверхности.

При течении вязкой жидкости касательная и нормальная составляющие скорости должны в точках поверхности обращаться в

нуль. Кроме того, на некотором небольшом отдалении от поверхности обтекаемого тела течение жидкости мало отличается от течения идеальной жидкости, при котором нормальная составляющая скорости на поверхности тела обращается в нуль, а касательная отлична от нуля. Имея это в виду, приходим к заключению, что изменение касательной составляющей вдоль нормали к поверхности тела должно иметь вид, указанный на рис. 9.9 кривой, относящейся к точке A . Эта кривая показывает, что касательная скорость, равная нулю в точке A , для точек, расположенных на нормали к криволинейной поверхности, постепенно увеличивается и на некотором расстоянии от поверхности мало отличается от значения, соответствующего потенциальному течению идеальной жидкости.

Далее известно, что при обтекании вязкой жидкостью какой-либо поверхности частицы жидкости притормаживаются в пограничном слое силами вязкости и притом тем в большей степени, чем ближе траектория частицы проходит к поверхности тела. Кроме того, как это было установлено выше, градиент давления $\partial p / \partial x$ для случая криволинейной поверхности отличен от нуля и, что важно, в кормовой части тела перепад давления направлен в сторону, противоположную основному движению жидкости ($\partial p / \partial x > 0$), так как в этой части давление возрастает по потоку. Поэтому, попадая в область задней части тела, где давление возрастает, частицы начинают получать ускорение в направлении, противоположном основному их движению.

В результате в области DSE касательная скорость изменит знак, то есть возникнет возвратное движение жидкости в пограничном слое. Это приведет к отрыву частиц жидкости от поверхности тела и к образованию вихрей.

Точка S поверхности тела, начиная от которой поток срывается с обтекаемого им тела, называется *точкой отрыва пограничного слоя*. Это точка S характеризуется равенством нулю производной $\partial u / \partial y_{y=0} = 0$.

Отсюда, между прочим, следует, что и напряжение трения

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

равно нулю в точке отрыва.

Приведем интегральное соотношение (9.7) к форме, более удобной для практического применения при решении задач, связанных с расчетом пограничного слоя около криволинейной поверхности.

Интегральное соотношение (9.7) имеет вид

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - \rho V \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_0.$$

Так как

$$\rho V \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy = \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta V u dy - \rho \int_0^\delta u \frac{dV}{dx} dy,$$

а из уравнения Бернулли следует, что

$$\frac{dp}{dx} = -\rho V \frac{dV}{dx} = -\rho V \cdot V',$$

то интегральное соотношение можно представить в следующем виде:

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - \rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta V u dy + \rho V' \int_0^\delta u dy - \rho V V' \delta = -\tau_0$$

или

$$\rho V' \int_0^{\delta} V - u \, dy + \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u \, V - u \, dy = \tau_0. \quad (9.23)$$

Обратим внимание на физический смысл интегралов в этом уравнении.

Первый интеграл выражает уменьшение секундного расхода через сечение в пограничном слое высотой δ , обусловленное влиянием вязкости. В самом деле, этот интеграл выражает разность между секундным расходом через сечение высотой δ для потока,двигающегося со скоростью V (то есть для потока идеальной жидкости), и секундным расходом для потока,двигающегося с действительной скоростью u , то есть при наличии вязкости.

Учитывая, что в интегралах, входящих в уравнение (9.23), верхний предел δ – величина условная и имея в виду, что значение этих интегралов мало меняются при неограниченном увеличении верхнего предела, можно интегралы в уравнении (9.23) брать от 0 до ∞ .

При этом рассматриваемый интеграл изобразится в виде некоторой площади (рис. 9.10), затемненной точками.

Этой площади можно поставить в соответствие площадь равновеликого прямоугольника $\delta^* V$ (рис. 9.10).

Тогда

$$\delta^* = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} V - u \, dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{V}\right) dy. \quad (9.24)$$

Величина δ^* представляет, очевидно, условную толщину некоего слоя, сквозь сечение которого в единицу времени при постоянной во всех точках сечения скорости V протекает количество жидкости, равное указанному выше уменьшению расхода.

Величина δ^* получила название *толщины вытеснения*.

Рассмотрим второй интеграл, входящий в уравнение (9.23).

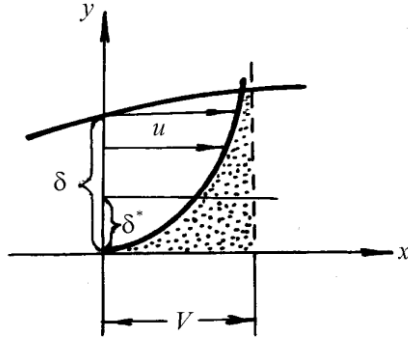


Рис. 9.10 – Толщина вытеснения

Этот интеграл определяет, очевидно, уменьшение *количества движения жидкости*, происходящее под влиянием вязкости. Если бы вязкость отсутствовала, то количество движения жидкости, протекающей через некоторое сечение слоя высотой δ^{**} , можно было бы написать в виде

$$\rho \delta^{**} V^2.$$

Выберем толщину δ^{**} такой, чтобы выполнялось равенство

$$\rho \delta^{**} V^2 = \int_0^{\infty} \rho u (V - u) dy.$$

Тогда

$$\delta^{**} = \frac{1}{\rho V^2} \int_0^{\infty} \rho u (V - u) dy = \int_0^{\infty} \frac{u}{V} \left(1 - \frac{u}{V} \right) dy. \quad (9.25)$$

Величина δ^{**} носит название *толщины потери импульса* и представляет собой условную толщину некоторого слоя, сквозь сечение которого в единицу времени и с постоянной скоростью V переносится количество движения, равное указанному выше уменьшению количества движения.

Подставляя величины δ^* и δ^{**} в уравнение (9.23) приведем его к следующему виду

$$\rho \frac{d}{dx} \delta^{**} V^2 + \rho V' \delta^* V = \tau_0.$$

Проводя дифференцирование находим

$$\rho V^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + \rho \delta^{**} 2VV' + \rho VV' \delta^* = \tau_0.$$

С целью приведения уравнения к безразмерной форме разделим его почленно на ρV^2 . Тогда получим

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'}{V} 2\delta^{**} + \delta^* = \frac{\tau_0}{\rho V^2} \quad (9.26)$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{V'\delta^{**}}{V} 2 + H = \frac{\tau_0}{\rho V^2}, \quad (9.27)$$

где $H = \delta^* / \delta^{**}$.

Это форма интегрального соотношения более удобна для расчета пограничного слоя около криволинейных контуров.

9.5 Пограничный слой при больших скоростях. Взаимодействие скачков с пограничным слоем.

Когда скачки появляются возле твердых тел, взаимодействие между скачками и пограничным слоем обычно влияет на оба течения. Градиент давления в непосредственной близости скачка нарушает течение пограничного слоя. Эти нарушения, которые распространяются как вверх, так и вниз по потоку в дозвуковой части пограничного слоя, в свою очередь влияют на условия вне пограничного слоя посредством волн расширения и сжатия, генерируе-

мыми возмущенным пограничным слоем. Так мы имеем взаимное влияние скачка и пограничного слоя, влияние, которое может привести к картине течения, в корне отличающейся от той, которая могла бы быть, если бы не было пограничного слоя.

Мы рассмотрим в этом параграфе три примера такого влияния: (i) отражение косого скачка от пограничного слоя на плоской пластине, (ii) возникновение скачков в вогнутом углу и (iii) возникновение скачков на входной кромке крыла.

Отражение косого скачка от плоской пластины. На рис. 9.11 косой скачок АВ падает на плоскую пластину, на которой имеется пограничный слой. Если бы не было пограничного слоя падающий скачок должен был бы отразиться в виде косого скачка равного поворотного угла, как показано на рис. 8.23b.

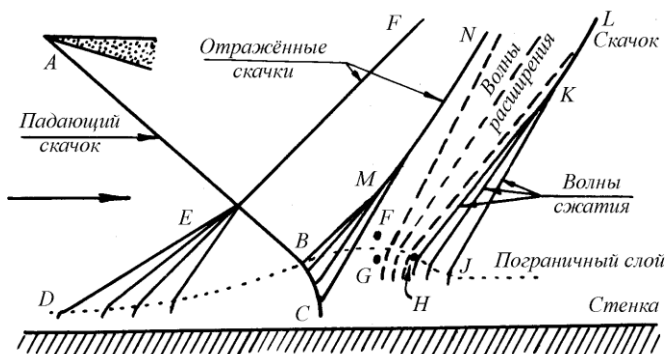


Рис. 9.11 – Отражение косого скачка от пограничного слоя на плоской поверхности

Когда присутствует пограничный слой этот простой тип отражения не может иметь места, так как: (i) скачок изгибается входя в область переменной скорости в пограничном слое и должен заканчиваться на звуковой линии в пограничном слое, (ii) влияние скачка

может быть распространено вверх по течению в дозвуковом пограничном слое.

Как результат последнего влияния давление в пограничном слое начинает увеличиваться перед точкой падения скачка AB . С этим увеличением давления идет уменьшение скорости и, следовательно, утолщение пограничного слоя вдоль DB . Наклонные волны сжатия возникают вдоль DB как результат поворота линий тока. Эти волны сжатия сливаются в скачок EF , который можно трактовать как часть системы отраженного скачка.

Как только первоначальный скачок AB входит в пограничный слой, он преломляется вдоль BC вследствие изменений чисел Маха в этой области. Как результат этого преломления возникают волны вдоль BC ; некоторые из них являются волнами разрежения, но зачастую они являются волнами сжатия, которые сливаются в скачок MN .

Давление в точке F часто больше чем в точке G вследствие прохождения потоком в точке F скачка сравнительно большей интенсивности. Такое наличие градиента давления вызывает поворот линий тока назад по направлению к стенке. Такое искривление линий тока вызывает волны расширения в сверхзвуковом потоке.

Если разница в давлении между F и G достаточно большая, поток может вернуться к стенке. Позднее, однако, перестроение потока таким образом вызывает волны сжатия вдоль вогнутой части пограничного слоя HJ . Эти волны сливаются в скачок KL .

Экспериментальные наблюдения хорошо согласуются с нарисованной волновой картиной. Природа взаимодействия зависит от числа Маха, интенсивности скачка, скоростного профиля в пограничном слое и особенно от того, является пограничный слой ламинарным или турбулентным. Во всех наблюдаемых случаях, однако,

картина течения содержит в большей или меньшей степени все или часть элементов, показанных на рис. 9.11.

Ламинарный пограничный слой. Несколько типичных черт, наблюдаемых в экспериментах, где косой скачок падает на ламинарный пограничный слой, показаны схематически на рис. 9.12. Правильное отражение навязывает в пограничном слое положительный градиент давления. Давление начинает вырастать значительно выше точки падения скачка. Это увеличение давления приводит к увеличению толщины пограничного слоя и в результате искривлённая линия тока генерирует волны сжатия, которые сливаются в “отражённый скачок”, выходящий выше точки падения падающего скачка. Если противоположный градиент давления (выше точки падения скачка) существенно велик, пограничный слой может даже оторваться, увеличивая таким образом интенсивность первого отражённого скачка. Последний имеет дополнительное изменяющее влияние на падающий скачок в точке пересечения падающего и отражённого скачков.

Так как движение в зоне отрыва относительно небольшое, то ее можно рассматривать в первом приближении как область постоянного давления. Следовательно падающий скачок (как на рис. 8.21с) отражается от этой зоны в виде расширения Прандтля-Майера. Последующий поворот потока по направлению к пластине присоединяет пограничный слой снова. Зачастую поворотный угол потока при прохождении волн расширения настолько велик, что поток стремится идти в пластину и последующее искривление направления течения по направлению пластины генерирует вторую ударную волну – второй «отраженный скачок», начало которого лежит за точкой падения падающего скачка. Пограничный слой часто становится турбулентным сразу же за вторым отраженным скачком.

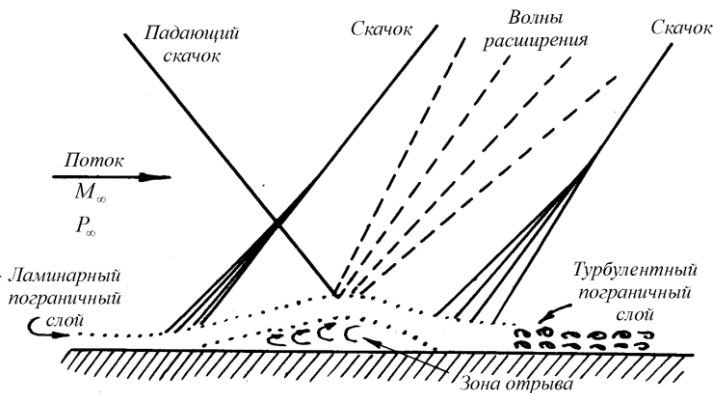


Рис. 9.12 – Отражение косо́го скачка от ламинарного пограничного слоя на плоской поверхности

Турбулентный пограничный слой. Для наших настоящих целей наиболее существенной разницей между ламинарным и турбулентным пограничным слоем является то, что в результате количества движения, вносимого в слой турбулентным перемешиванием, турбулентный слой намного лучше способен противостоять градиентам давления. Взаимодействие между скачком и пограничным слоем (рис. 9.13a) является следовательно намного слабее, чем в случае ламинарного пограничного слоя. Здесь имеется умеренное утолщение пограничного слоя с волнами генерируемыми как выше так и ниже точки падения падающего скачка. Однако протяженность влияния как выше так и ниже по потоку сравнительно небольшая, поэтому отражение скачка от турбулентного слоя можно рассматривать как близко соответствующее правильному отражению (рис. 8.23b).

Рис. 9.13b показывает другую форму отражения иногда наблюдаемую в турбулентном пограничном слое, особенно при наличии

небольшого отрыва течения пограничного слоя. Отрыв дает подъем «отраженному» скачку, который начинается выше точки падения.

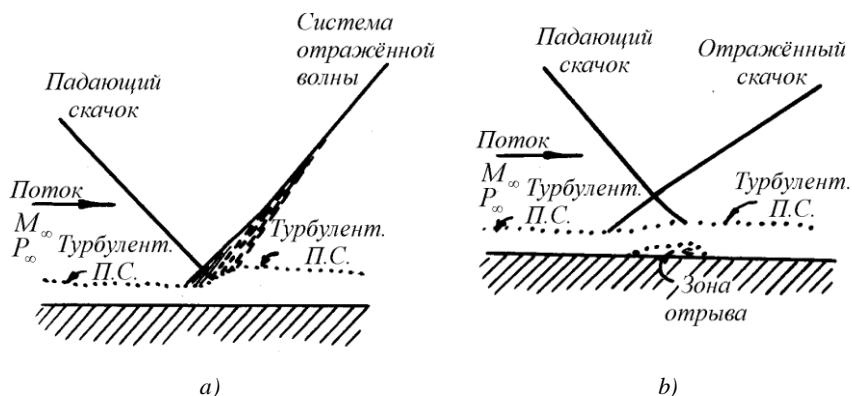


Рис. 9.13 – Отражение косо скачка от турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности:

a) – правильное отражение; *b)* – отражение с отрывом пограничного слоя.

Генерация скачка при обтекании вогнутого угла. Так как поток в непосредственной близости вогнутого угла составлен из сверхзвуковой и дозвуковой частей пограничного слоя будет лучше обсудить отдельно особенности этих двух типов течения. При чистом (невязком) сверхзвуковом течении все линии тока поворачиваются на равные углы поворота при прохождении через косой скачок, берущий свое начало в угловой точке (рис. 9.14*a*).

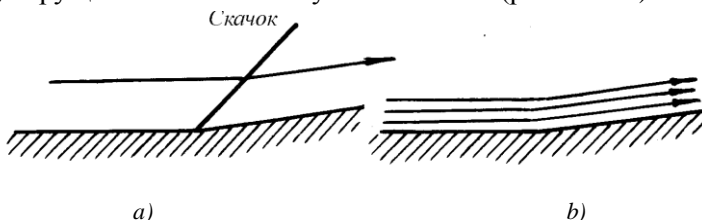


Рис. 9.14 – Обтекание вогнутого угла невязким потоком:

a) – сверхзвуковое течение; *b)* – дозвуковое течение.

При чистом дозвуковом течении невязкой жидкости линии тока являются приблизительно гиперболами асимптотически приближающимися к направлениям стенок угла (рис. 9.14*b*).

Действительное возникновение скачка в угле должно иметь некоторые аспекты обеих картин течений, обсужденных выше, совместно с добавочными эффектами, присущими вязкости в пограничном слое.

Типичные волновые картины для ламинарного и турбулентного слоев показаны на рис. 9.15.

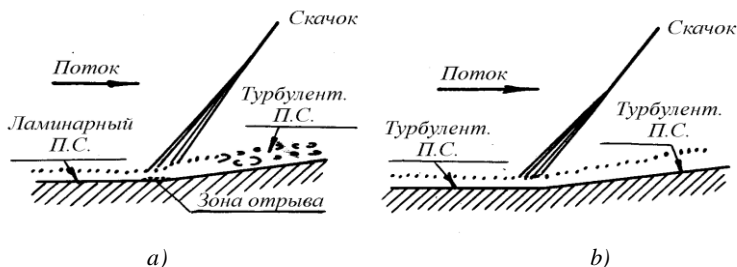


Рис. 9.15 – Типично наблюдаемые картины течения при возникновении скачка в вогнутом угле:

a) – ламинарный пограничный слой; *b*) – турбулентный пограничный слой

Для обеих типов пограничного слоя скачок формируется в результате слияния волн сжатия, возникающих в области подъема давления и утолщения пограничного слоя.

Возникновение скачков при обтекании клина. Клин обычно представляют как тело дающее «чистую» картину течения с единственным скачком (рис. 9.16).

Поверхностное давление на клине часто используется для измерения направления потока и числа Маха.

Однако имеется пограничный слой на клине, который также слегка выходит за вершину клина и этот пограничный слой сильно

искривляет линию тока возле вершины. Картина течения и распределение давления в непосредственной близости клина довольно просты. Рис. 9.16*b* показывает черты, иногда наблюдаемые в таких потоках. Скачок сильно искривлён возле вершины и асимптотически ослабевает к интенсивности теоретического скачка, соответствующего рис. 9.16*a* посредством волн разрежения, возникающих на кривизне линии тока, связанной с формированием вязкого слоя.

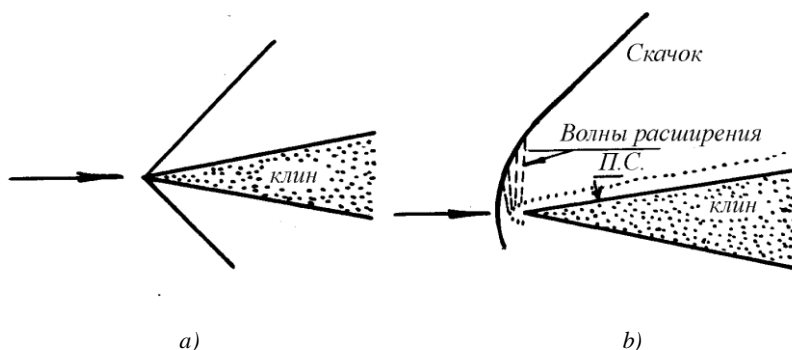


Рис. 9.16 – Влияние пограничного слоя возле входной кромки обтекаемого клина:
a) – невязкое течение; *b)* – вязкое течение.

При использовании клина при измерениях поэтому очень важно не размещать приёмные отверстия для измерения давления возле вершины.

“Прямой скачок” в трубе. При расчётах одномерного сверхзвукового потока в трубах часто пользуются формулами прямого скачка и говорят о прямом скачке, стоящем в трубе (рис. 8.4), когда противодавление достаточно велико. В действительности наблюдения показывают, что подъём давления при прохождении через скачок наблюдается на некоторой дистанции, равной нескольким диаметрам трубы, и фотографии-шир показывают картину, по-

добно той, которая изображена на рис. 9.17. Заметим, что прямой скачок распространяется до стенки, где присутствует пограничный слой, и что внезапное утолщение пограничного слоя выше скачка вызывает появление косого скачка. Отражённый скачок в точке соединения прямого и косого скачков диктуется требованиями неразрывности.

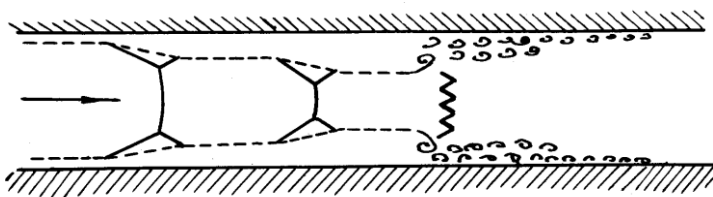


Рис. 9.17 – Типичное взаимодействие скачка с пограничным слоем при достаточно высоком противодавлении

Так серия разветвлённых прямых скачков имеет место. Протяжённость прямого скачка становится меньше с увеличением толщины пограничного слоя. Окончательно звуковая скорость достигается и поток затем замедляется как дозвуковой, расширяя проход. На месте прямого скачка, однако, поток сжимается посредством комбинаций прямых и косых скачков к числу Маха единице и затем движется с дозвуковой скоростью.

Вопросы для самопроверки.

1. Покажите, что давление внутри пограничного слоя не меняется вдоль нормали к контуру тела и равняется давлению на внешней границе слоя в рассматриваемом месте.
2. Получите систему дифференциальных уравнений пограничного слоя.
3. Выведите интегральное соотношение пограничного слоя для случая плоского установившегося движения.
4. Определите толщину пограничного слоя и силу трения для плоской пластины с ламинарным пограничным слоем.

5. Как определить толщину пограничного слоя и силу трения в случае турбулентного пограничного слоя вдоль плоской пластины.
6. Смешанный пограничный слой. Как можно влиять на сопротивление трения, варьируя длиной ламинарного и турбулентного участков пограничного слоя?
7. Как определяется точка отрыва пограничного слоя?
8. Что такое “толщина вытеснения” и “толщина потери импульса”?
9. Опишите взаимодействие скачков с пограничным слоем.

ГЛАВА 10.

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СУЖИВАЮЩИХСЯ СОПЕЛ И ОТВЕРСТИЙ. СОПЛА ЛАВАЛЯ.

10.1 Суживающиеся сопла.

Широко применяются для создания потоков дозвуковых и околозвуковых скоростей. Гидравлический расчёт таких сопел весьма прост и сводится к определению размеров выходного сечения по заданному расходу газа и заданной скорости истечения. При расчёте считают, что течение газа в сопле адиабатическое, так как за короткое время протекания газовых частиц через сопло теплообмен с окружающей средой практически не устанавливается. Следовательно, для расчёта сопла могут быть использованы уравнения адиабатического течения. Если пренебречь влиянием трения, то течение в сопле можно считать изоэнтропическим. Расчёт таких сопел рассматривается в главе 3.

Полученные при этом формулы хорошо подтверждаются экспериментом только в том случае, когда профиль сопла выполнен плавным. Плавно суживающаяся форма сопла приближает распределение скоростей в выходном сечении к равномерному. С этой целью стенки сопла должны быть особым образом рассчитаны.

Профиль суживающегося сопла может быть рассчитан по формуле Витошинского:

$$r = \frac{r^*}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r^*}{r_0} \right)^2 \frac{\left(1 - \frac{3x^2}{l'^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{x^2}{l'^2} \right)^3} \right]}}. \quad (10.1)$$

Величины, входящие в формулу (10.1), пояснены на рис. 10.1.

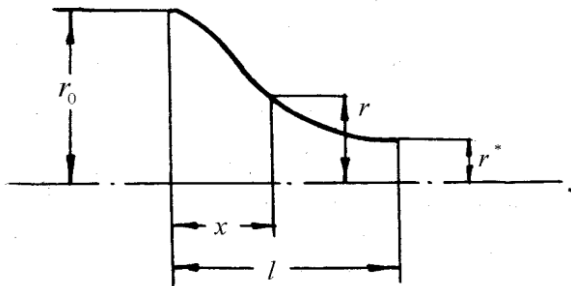


Рис. 10.1 – Профиль суживающегося сопла, рассчитанный по формуле Витошинского

Такой профиль пригоден для сопел, соединяющих две трубы различных диаметров, когда поток при переходе в трубу меньшего диаметра должен быть ускорен, а скорости в каждой точке выходного сечения сопла должны быть одинаковыми. Сопла такого профиля применяются для аэродинамических труб дозвуковых скоростей.

Опыт показывает, что в широком диапазоне скоростей до $\lambda = 0,9 \div 0,95$ поле скоростей за соплом достаточно равномерно.

Спектр струи за суживающимся соплом при нерасчётном режиме нами подробно рассмотрен на рис. 7.11. Давление в струе меняется по некоторому периодическому закону, близкому к синусу-

соидальному. Соответствующим будет и характер изменения скоростей вдоль оси струи.

10.2. Истечения газа из отверстия с острой кромкой. Второе критическое отношение давления.

Теоретические исследования и эксперимент обнаруживают некоторые новые свойства потока газа, вытекающего из отверстия с острой кромкой.

При истечении из суживающегося сопла плавный профиль стенок обеспечивает постепенное расширение потока и определяет форму линий тока. Возникающие на входе радиальные составляющие скоростей уменьшаются при течении по соплу и к выходному сечению обращаются в нуль. Поток в выходном сечении имеет равномерное поле скоростей. При сверхкритических перепадах давлений выходное сечение сопла совпадает с критическим. Истечение из отверстия с острой кромкой происходит иначе (рис. 10.2).

В сосуде на достаточно большом удалении от отверстия скорость газа равна нулю, а давление — p_0 . За отверстием поддерживается давление p_a .

Вблизи отверстия слева скорости газа интенсивно нарастают, струйки газа суживаются и искривляются. Поток газа срывается с острых кромок отверстия и дальше движется, как свободная струя.

Спектр струи в отверстии показывает, что кривизна разных линий тока оказывается различной. Наиболее искривленными оказываются линии тока у границы струи, а наименее искривленными — линии тока вблизи оси. Поэтому скорости на внешних линиях тока будут больше, чем скорости в ядре струи. На выходе из отверстия устанавливается неравномерное распределение скоростей и давлений. Неравномерность потока усугубляется влиянием вязкости.

Струя будет увлекать за собой газ окружающей среды и тормозиться. Средняя скорость струи будет уменьшаться, а поперечное сечение ее – увеличиваться. Размывание струи начинается непосредственно от кромок отверстия. Однако происходит оно достаточно медленно. На этом основании можно воспользоваться следующей идеализированной схемой истечения через отверстие. Предполагаем газ идеальным, а движение – безвихревым.

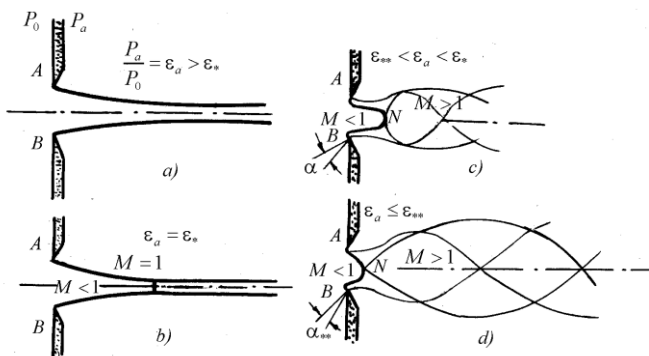


Рис. 10.2 – Схемы истечения струи из отверстия с острой кромкой при различных режимах

На острых кромках A и B будет происходить отрыв. Так как мы предполагаем, что трение отсутствует, то подмешивание окружающего газа к струе не будет. Следовательно, справа от отверстия образуются две области: свободная струя и неподвижный газ с давлением p_a . Так как давление на границе струи является постоянным, то очевидно, что скорость на границе также постоянна.

Когда отношение давлений $p_a/p_0 = \varepsilon_a$ будет больше критического или близкое к нему, то в этом случае струя имеет форму, изображенную на рис. 10.2а. Струя непрерывно суживается, причем максимальное сужение имеет место на бесконечном удалении от отверстия.

Если $\varepsilon_a = \varepsilon_*$ (критическому отношению давления), то на границе струи скорость течения равна критической. Внутри струи скорость меньше критической. С удалением от отверстия эпюры скоростей выравниваются и на некотором конечном расстоянии от отверстия скорости в струе становятся равными скорости на границе, причём выравнивание поля скоростей происходит вследствие поджатия струи и ускорения ядра. Линия критических скоростей для такого режима показана на рис. 10.2*b*.

При дальнейшем понижении противодавления ($\varepsilon_a < \varepsilon_*$) струя становится сверхзвуковой.

Переход через скорость звука совершается на линии звуковых скоростей *ANB*, которая идёт от кромок отверстия и вдаётся в струю в виде “язычка” (рис. 10.2*c*).

Следовательно, при $\varepsilon_a < \varepsilon_*$ спектр струи перестраивается. Линия звуковых скоростей, совпадающая при $\varepsilon_a = \varepsilon_*$ с границей струи и минимальным сечением, по мере уменьшения ε_a деформируется и приближается к выходному сечению отверстия. Справа от переходной линии течение сверхзвуковое. Деформация линии перехода объясняется перестройкой поля скоростей в выходном сечении *AB* и в последующих сечениях, связанной с изменением кривизны граничных линий тока. Внутри “язычка” скорости дозвуковые. Углы характеристик α с уменьшением ε_a уменьшаются (рис. 10.2*c*).

Существует такое значение внешнего давления p_{**} , при котором линия перехода занимает стабильное положение; дальнейшее снижение давления внешней среды уже не приводит к её деформации. Давление p_{**} было названо Ф.И. Франклем вторым критическим давлением. Соответственно отношение

$$\varepsilon_{**} = \frac{P_{**}}{P_0} \quad (10.2)$$

будем называть *вторым критическим отношением давлений*.

Выше указывалось, что максимальный расход для сопла имеет место при критическом противодавлении и дальнейшее снижение противодавления не влияет на расход. При истечении из отверстия, благодаря изменению формы линии перехода при $\varepsilon_a < \varepsilon_*$ расход газа будет увеличиваться до тех пор, пока противодавление не станет равным P_{**} ($\varepsilon_a = \varepsilon_{**}$).

На рис. 10.3 представлены кривые относительного расхода через суживающееся сопло и через отверстие с острой кромкой при одинаковой площади поперечного сечения в зависимости от ε_a для воздуха. В обоих случаях расход отнесён к критическому расходу через сопло.

Для воздуха ($k = 1,4$) и формы отверстия, указанной на рис. 10.2, $\varepsilon_{**} = 0,037$.

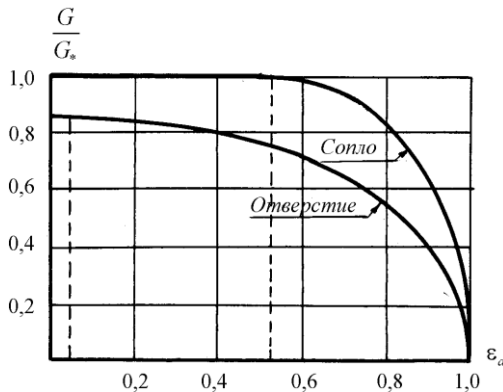


Рис. 10.3 – Изменение расхода газа через сопло и отверстие с острой кромкой при одинаковой площади сечения ($k = 1,4$)

10.3. Сопла Лавалья

Расчёт сверхзвукового сопла методом характеристик нами подробно изложен ранее (рис. 7.13). В этом параграфе мы более подробно рассмотрим поведение сопел Лавалья при нерасчётных режимах.

Предположим, что при постоянном значении p_0 давление внешней среды p_a меняется. Проследим изменение структуры потока как внутри сопла, так и за ним. При этом можно выделить четыре характерные группы режимов; в пределах каждой группы режимов картина течения качественно сохраняется неизменной.

Обозначим противодавление, соответствующее расчетному режиму течения в сопле, через p_1 , то есть при расчетном режиме $\varepsilon_a = \varepsilon_1 = p_1/p_0$.

Первая группа режимов характеризуется пониженными давлениями среды $p_a/p_0 < p_1/p_0$. На рис. 10.4a представлена схема спектров струи на выходе из плоского сопла в этом случае. При расчетном режиме $p_a = p_1$ струя приобретает форму, представленную на рис. 10.4b.

Вторая группа режимов характеризует истечение из сопла Лавалья при повышенном противодавлении среды. Зная расчетную скорость в выходном сечении сопла M_1 , легко определить то значение давления среды, при котором в выходном сечении образуется прямой скачок уплотнения (рис. 10.4 и формула (8.13)).

$$p_{1k} = p_1 \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right).$$

Рассматриваемая вторая группа режимов характеризуется следующим соотношением давления среды:

$$p_1 \leq p_a \leq p_{1k}.$$

Схема спектров струи на выходе из плоского сопла в случае небольшого превышения давления p_a над p_1 , когда угол δ невелик, представлена на рис. 10.4с. При некотором значении противодавления $p_a = p'_{1k}$ будет предельный случай сохранения картины течения (рис. 10.4с). Угол отклонения линии тока δ_{max2} в этом случае легко определяется с помощью диаграммы ударных поляр (рис. 10.5).

Величина давления p'_{1k} может быть определена с помощью формул косого скачка (8.10).

При давлении внешней среды $p_a > p'_{1k}$ система пересекающихся косых скачков разрушается и переходит в мостообразный скачок. Это явление аналогично рассмотренным на стр. 264-267 случаям неправильного отражения косого скачка от твердой стенки и пересечения скачков (рис. 10.4d).

При дальнейшем повышении среды внутренняя дозвуковая область течения расширяется, а внешняя сверхзвуковая – суживается. Существует такое давление среды p''_{1k} , при котором криволинейный скачок распространяется почти на все сечение; в этом случае за скачком скорости становятся дозвуковыми (рис. 10.4e), за исключением узкой периферийной области.

Давление p''_{1k} будет соответствовать такому режиму, при котором угол поворота δ (рис. 10.4d) становится равным максимальному углу δ_{max1} , который можно определить с помощью диаграммы ударных поляр (рис. 10.5). Зная этот угол, величина давления p''_{1k} определяется с помощью формул косого скачка (8.10).

При давлениях среды $p_a > p''_{1k}$ скачок выпрямляется и при $p_a = p_{1k}$ (формула (8.13)) скачок должен стать прямым, располага-

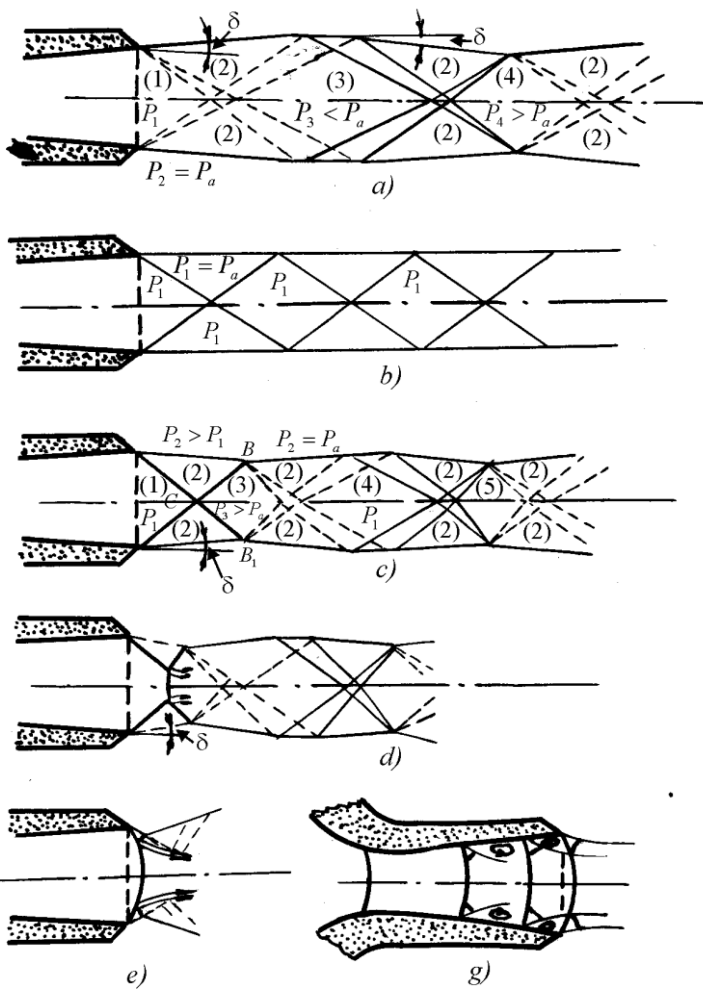


Рис. 10.4 – Схемы спектров струи за плоским соплом при различных режимах:
 а) – пониженное противодавление, $\epsilon_a < \epsilon_1$; б) – расчётный режим, $\epsilon_a = \epsilon_1$;
 в), д) и е) – повышенное противодавление, $\epsilon_1 \leq \epsilon_a \leq \epsilon_{1k}$; в) $\epsilon_1 \leq \epsilon_a \leq \epsilon'_{1k}$; д) $\epsilon'_{1k} < \epsilon_a \leq \epsilon''_{1k}$; е) $\epsilon''_{1k} < \epsilon_a \leq \epsilon_{1k}$; г) – повышенное противодавление, $\epsilon_a > \epsilon_{1k}$

ясь в выходном сечении сопла. Фактически вследствие неравномерного распределения скоростей в конических соплах и влияния пограничного слоя (вязкости) скачок входит внутрь сопла несколько искривленным (рис. 10.4g). Дальнейшее повышение давления среды ($p_a > p_{lk}$) вызывает перемещение системы скачков внутрь сопла, как показано на рис. 10.4g.

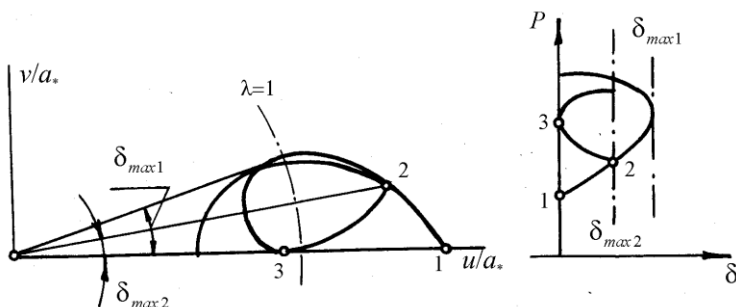


Рис. 10.5 – К определению угла отклонения линии тока δ_{max2} на выходе из сопла при повышении противодавления

Следует иметь ввиду, что перемещение скачка внутрь сопла сопровождается новыми качественными изменениями потока (**третья группа режимов**). Давление за скачком в этом случае уже не равно давлению среды; оно оказывается меньше p_a . Поэтому за скачком давление продолжает возрастать.

При некотором давлении среды p_{lm} скачок входит в минимальное сечение сопла и здесь исчезает. В минимальном сечении сопла параметры потока при этом критические, но перехода в сверхзвуковую область не происходит.

При $p_a > p_{lm}$ скорости во всех точках сопла дозвуковые и мы получаем **четвертую группу режимов** сопла. Для этой группы ха-

рактены последовательное расширение потока в суживающейся части и сжатие в расширяющейся части сопла. Минимум давления достигается в узком сечении. Таков характер распределения давлений в трубах Вентури, применяемых для измерения расхода газа.

Картина распределений давлений в сопле Лаваля при различных режимах показана на рис. 10.6

10.4. Сверхзвуковое сопло с косым срезом.

При расчетном режиме истечение из сверхзвукового сопла с косым срезом происходит с небольшими изменениями спектра потока. Эти изменения обусловлены влиянием пограничного слоя на стенки косого среза KA (рис. 10.7)

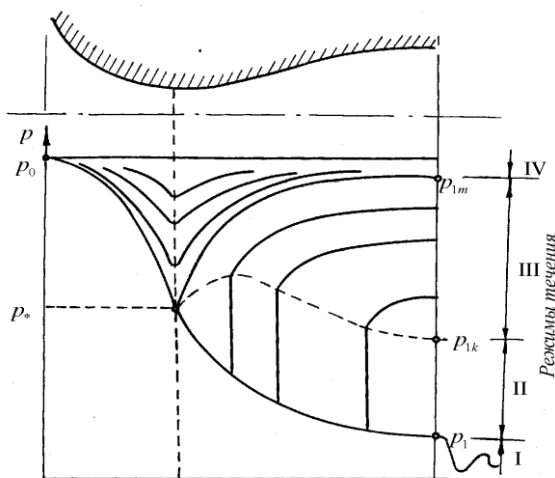


Рис. 10.6 – Диаграмма распределений давлений в сопле Лаваля при различных режимах. При $\varepsilon_a = \frac{p_a}{p_0} > \varepsilon_{1m} = \frac{p_{1m}}{p_0}$ скорости в сопле дозвуковые (трубы Вентури)

При нерасчетном режиме, когда давление среды p_a меньше расчётного (*режим* I), дополнительное расширение струи происходит в косом срезе или за его пределами. Если угол первой характеристики α_{m1} меньше угла косого среза φ , то расширение потока происходит за пределами косого среза (рис. 10.7а). В этом случае кромки сопла A и A_1 создают стационарные волны разрежения, пересекающиеся не на оси струи, а в области, лежащей ближе к кромке A . По этой причине нарушается симметричность спектра истечения и струя отклоняется от оси сопла. Волны разрежения отражаются от границы струи, как волны сжатия, пересекающиеся вблизи противоположной границы. В зонах (2), примыкающих к границе, давление равно внешнему давлению p_a , в зоне (3) (за пересечением волн разрежения) давление пониженное, а в зоне (4) – повышенное, равное давлению в косом срезе сопла p_1 .

Если первая волна разрежения из точки A_1 частично или полностью лежит в пределах косого среза, то характер течения меняется (рис. 10.7б). Отраженная от стенки косого среза (частично или полностью) волна разрежения приводит к понижению давления и у кромки A давление оказывается меньше, чем p_a . В результате в точке A образуется косой скачок уплотнения. В косом скачке AD линия тока отклоняется по часовой стрелке, поэтому средний угол отклонения струи несколько увеличивается по сравнению с первым случаем. Такой характер истечения будет иметь место в том случае, когда угол косого среза

$$\varphi < \arcsin \frac{1}{M_1}.$$

Для второй группы режимов (давления среды p_a выше расчетного) на кромках A и A_1 возникают косые скачки уплотнения (рис. 10.7с), пересекающиеся за косым срезом, если угол β_1 скачка из точки A_1 меньше угла косого среза φ .

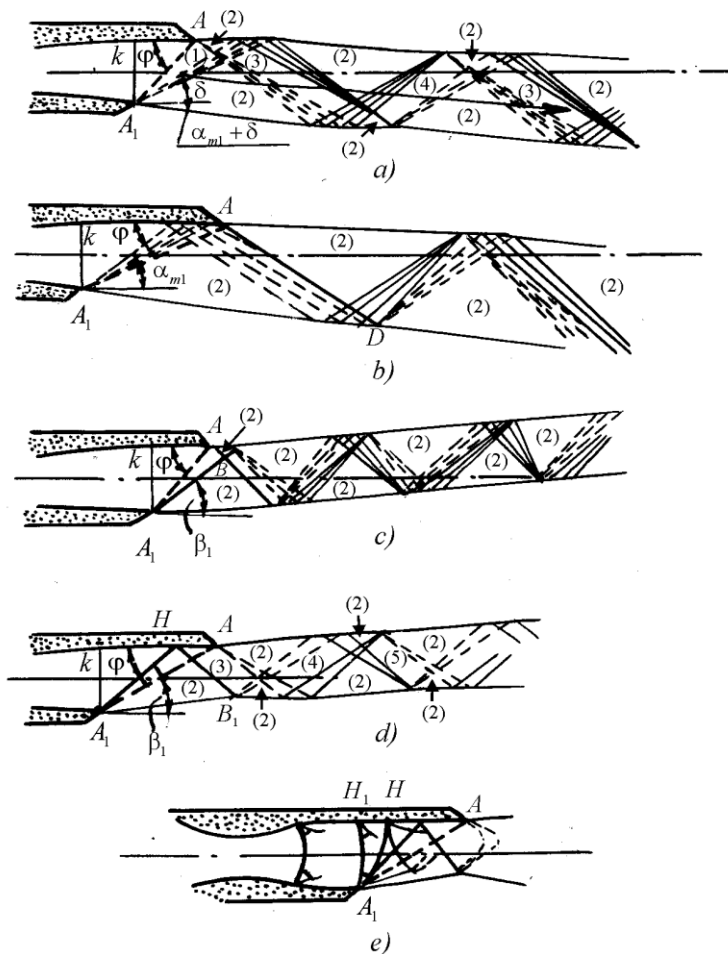


Рис. 10.7 – Спектры струи за соплом с косым срезом

Точка пересечения скачков B лежит у верхней границы струи. Поток отклоняется от оси струи, причем поворот потока происходит в противоположном первому случаю направлении.

Если $\varphi < \beta_1$ (рис.10.7*d*), то первый косой скачок лежит в пределах косого среза.

В отраженном скачке HB_1 давление увеличивается до значения, большего, чем p_a . В результате в области (3) давление повышенное.

Из точек A и B_1 распространяются волны разрежения. В зонах (2) устанавливается давление p_a . В зоне (4) давление равно p_1 , а в зоне (5) давление вновь повышается. Далее процесс повторяется.

При дальнейшем повышении противодавления скачок A_1H будет поворачиваться к сечению A_1k . При некотором значении $p_a = p'_{1k}$ нормальное отражение скачка A_1H становится невозможным, так как скорость за первичным скачком близка к скорости звука. Скачок становится λ -образным и в косом срезе у стенки HA образуется отрыв струи (рис.10.7*e*).

Если $p_a \approx p'_{1k}$, то мостообразный скачок располагается в сечении сопла A_1H_1 и спектр струи почти не отличается от рассмотренного выше для сопла с прямым срезом.

Расчет спектра и определение среднего угла отклонения на выходе из сопла с косым срезом могут быть произведены методом характеристик (режимы I) в комбинации с методом ударных полярь, если $p_a > p_1$ (режимы II).

Вопросы для самопроверки.

1. Какие требования предъявляются к суживающемуся соплу?
2. Что такое второе критическое отношение давления?

3. Опишите режимы работы сопла Лавала.
4. Опишите особенности работы сверхзвукового сопла с косым срезом.

ГЛАВА 11.

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ РЕШЕТКИ ТУРБОМАШИН

11.1. Классификация решеток турбомашин

Классификация решеток турбомашин может быть произведена по различным параметрам.

В зависимости от расчетных условий обтекания и соответствующих им геометрических параметров профиля и канала различают три основных типа решеток:

- (i) *конфузорные* – используются в турбинах в качестве как сопловых или направляющих (неподвижных), так и реактивных рабочих (вращающихся);
- (ii) *активные* – используются в турбинах в качестве рабочих (вращающихся);
- (iii) *диффузорные* – используются в компрессорах в качестве как направляющих (неподвижных), так и рабочих (вращающихся); в последнее время в турбинах в качестве рабочих (вращающихся) в зонах отрицательных степеней реактивности.

В зависимости от общего направления движения газа по отношению к оси вращения решетки подразделяются на *осевые* и *радиальные*. В некоторых конструкциях машин поток газа движется под углом оси вращения (*диагональные* решетки).

В зависимости от скорости (числа M) все решетки следует разделить на три группы: *дозвуковые*, *околозвуковые* и *сверхзвуковые*. В пределах каждой этой группы решетки различаются углом поворота потока ($\theta = 180^\circ - \beta_1 + \beta_2$).

Кроме того, применяемые решетки различают по относительной высоте, характеризуемой отношением $\bar{l} = l/b$ на *решетки малой высоты* ($\bar{l} \leq 1,0 \div 1,5$) и *решетки большой высоты* ($\bar{l} > 1,5 \div 2,0$).

Вместе с тем разные решетки различаются *вверностью* $\Theta = D_{cp}/l$; при малых D_{cp}/l ($D_{cp}/l \leq 10$) лопатки выполняются с переменным по высоте профилем (закрученные лопатки).

Геометрические параметры решеток подробно рассмотрены в курсе «Паровые и газовые турбины» и здесь не рассматриваются.

11.2. Силы, действующие на профиль в решетке.

Теорема Н.Е. Жуковского для решетки

Для определения сил, действующих на профиль, выделим часть потока, как это показано на рис. 11.1.

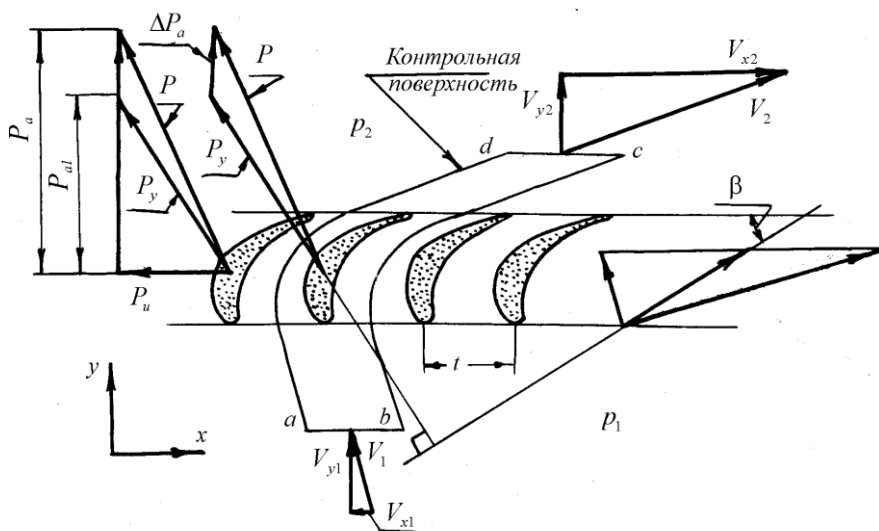


Рис. 11.1 – К определению сил, действующих на профиль в турбинной решётке

Внешними границами выделенного контрольного объема служат отрезки ab и dc , параллельные оси решетки и равные шагу t , и линии тока ad и bc . Линии ab и dc , строго говоря, должны находиться на бесконечности от решетки, так как параметры потока вдоль этих линий предполагаются постоянными.

Сверху и снизу контрольный объем ограничен двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на единицу длины и параллельными плоскости чертежа.

Для выбранного контрольного объема часть лопатки, которая находится в контрольном объеме, является частью системы (рис. 11.2).

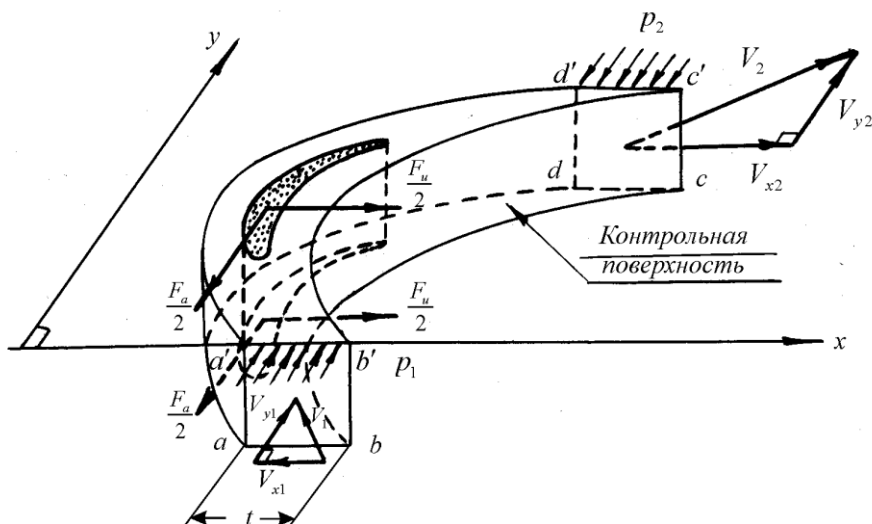


Рис. 11.2 – Силы, действующие на поверхность контрольного объема, выделенного в турбинной решётке

Для установившегося течения уравнение количества движения для контрольного объема имеет вид (2.11)

$$\sum \vec{F} = \oint_{\text{к. пов.}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \vec{V},$$

или в проекциях на ось x и y получаем:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \int \rho V_n V_x dA_{\text{ббл}x} - \int \rho V_n V_x dA_{\text{бл}x}, \\ \sum F_y &= \int \rho V_n V_y dA_{\text{ббл}x} - \int \rho V_n V_y dA_{\text{бл}x}. \end{aligned}$$

Напомним, что в выражение $\sum \vec{F}$ или $\sum F_x$ и $\sum F_y$ для x и y направлений входит *алгебраическая сумма* всех сил, которые действуют со стороны окружающей среды на вещество, заполняющее контрольный объем в данный момент времени. Сюда должны быть включены силы, действующие на поверхностях, полученных от пересечения контрольной поверхности с лопаткой.

Так как боковые поверхности тока $aa'd'd$ и $bb'c'c$ эквидистантны, то результирующие силы, действующие на них со стороны окружающего потока, равны по величине и противоположны по знаку.

На торцевые поверхности $aa'b'b$ и $dd'c'c$ действуют силы давления p_1 и p_2 соответственно.

В проекции на направление y (нормальное к оси решетки) уравнение количества движения запишется в виде (заметим, что $V_n = V_y$):

$$\sum F_y = p_1 - p_2 - F_a = \rho_2 V_{y2}^2 - \rho_1 V_{y1}^2 t.$$

$$\text{Откуда } F_a = t \left[p_1 - p_2 + \rho_1 V_{y1}^2 - \rho_2 V_{y2}^2 \right].$$

В проекции на направление x имеем

$$\sum F_x = t \rho_2 V_{y2} V_{x2} + t \rho_1 V_{y1} V_{x1} = F_u$$

Откуда $F_u = t\rho_1 V_{y1} V_{x2} + V_{x1}$, так как согласно уравнению непрерывности $t\rho_1 V_{y1} = t\rho_2 V_{y2}$.

Согласно третьему закону Ньютона проекции силы, с которой поток, находящийся в контрольном объеме, действует на профиль единичной длины, будут равны по величине, но противоположно направлены проекциям силы F_a и F_u . То есть $P_a = -F_a$, $P_u = -F_u$ (рис. 11.1). Или, окончательно

$$P_a = t \left[p_2 - p_1 + \rho_2 V_{y2}^2 - \rho_1 V_{y1}^2 \right], \quad (11.1)$$

$$P_u = -t\rho_1 V_{y1} V_{x1} + V_{x2}. \quad (11.2)$$

Уравнения (11.1) и (11.2) можно представить в другой форме, выразив силы P_u и P_a через циркуляцию скорости Γ и параметры потока на входе и выходе из решетки.

Согласно уравнению неразрывности

$$\rho_1 V_{y1} = \rho_2 V_{y2} = \rho V_y,$$

где ρ – средняя плотность газа.

Скорость V_y , входящую в это выражение, определим как среднюю арифметическую скоростей на входе и выходе

$$V_y = \frac{V_{y1} + V_{y2}}{2}.$$

Легко показать, что при этом

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (11.3)$$

Последнее выражение получаем из определения среднего удельного объема газа

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Циркуляция скорости вокруг профиля равна

$$\Gamma = -t \, V_{x1} + V_{x2} \, ,$$

так как циркуляции по эквидистантным линиям ad и bc одинаковы по величине и противоположны по знаку. При этом за положительный принят такой обход, чтобы область оставалась всегда слева при обходе.

После простых преобразований из (11.2) и (11.1) получаем

$$P_u = \rho \cdot \Gamma \cdot V_y \, , \quad (11.4)$$

$$P_a = t \left[p_2 - p_1 + \rho V_y \, V_{y2} - V_{y1} \right] .$$

Воспользуемся уравнением энергии (3.12)

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} ,$$

или

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{V_{x2}^2 - V_{x1}^2}{2} + \frac{V_{y2}^2 - V_{y1}^2}{2} .$$

Откуда

$$\frac{V_{y2} + V_{y1}}{2} \, V_{y2} - V_{y1} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \frac{V_{x2} - V_{x1}}{2} \, V_{x1} + V_{x2} \, .$$

Заметим, что

$$\frac{V_{x2} - V_{x1}}{2} = V_x \, , \quad \frac{V_{y2} + V_{y1}}{2} = V_y \, .$$

Тогда

$$V_y \, V_{y2} - V_{y1} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) - V_x \, V_{x1} + V_{x2} \, .$$

Подставив это выражение в формулу для P_a , получаем

$$P_a = t \left[p_2 - p_1 + \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \rho \right] + \rho \cdot \Gamma \cdot V_x. \quad (11.5)$$

Силу P_a удобно представить в виде суммы двух сил

$$P_a = P_{a1} + \Delta P_a,$$

где

$$P_{a1} = \rho \cdot \Gamma \cdot V_x, \quad (11.6)$$

$$\Delta P_a = t \left[p_2 - p_1 + \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \rho \right]. \quad (11.7)$$

Результирующую сил P_{a1} и P_u обозначим через P_y , а общую результирующую силу – через P (рис. 11.1).

Силу P_y определим по формуле

$$P_y = \sqrt{P_u^2 + P_{a1}^2}.$$

Подставив сюда значения P_u и P_{a1} по уравнениям (11.4) и (11.6), получим

$$P_y = \rho \Gamma \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Но

$$V_x^2 + V_y^2 = V^2,$$

где V – средняя векторная скорость.

Следовательно, выражение для P_y при обтекании решетки имеет такой же вид, как и в случае одиночного профиля

$$P_y = \rho \cdot \Gamma \cdot V. \quad (11.8)$$

Направление силы P_y перпендикулярно направлению средней векторной скорости V . Это следует из очевидного равенства

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{P_u}{P_{a1}}.$$

Итак, сила Жуковского, действующая на профиль решетки, равна произведению средней плотности газа на циркуляцию скорости вокруг профиля и на среднюю векторную скорость.

Направление силы P_y определяется поворотом вектора скорости V на 90° в сторону направления циркуляции.

Таким образом мы установили, что в отличие от одиночного профиля результирующая сила, действующая на профиль в решетке, равна сумме силы Жуковского P_y и добавочной силы ΔP_a , перпендикулярной оси решетки

$$\vec{P} = \vec{P}_y + \Delta \vec{P}_a.$$

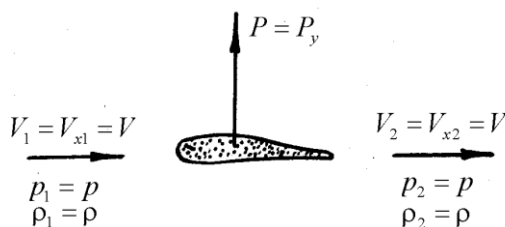
Важно отметить, что природа сил P_y и ΔP_a различна. В то время как сила P_y зависит от циркуляции потока и обращается в нуль при $\Gamma = 0$, сила ΔP_a от циркуляции непосредственно не зависит.

Сила, действующая на профиль, определена для общего случая движения газа. С помощью полученных общих соотношений нетрудно получить величину аэродинамической силы, действующей на профиль, для некоторых частных случаев. Так, переходя от решетки к одиночному профилю, увеличивая шаг решетки до бесконечности, получим $p_2 = p_1$ и $\rho_2 = \rho_1$; тогда $\Delta P_a = P_u = 0$ и, следовательно, в случае изэнтропического обтекания изолированного профиля результирующая сила, действующая на профиль, равна силе Жуковского:

$$P = P_y = \rho \cdot \Gamma \cdot V$$

где ρ и V – плотность и скорость набегающего потока. Направление силы перпендикулярно направлению скорости набегающего потока.

Равенство $P_u = 0$ для поставленной задачи было получено впервые Л. Эйлером в 1745 году и независимо от него в более общем виде Даламбером. Оно может показаться парадоксальным, так как противоречит опыту. Однако следует иметь в виду, что этот результат получен в предположении отсутствия вязкости и отрыва потока от поверхности обтекаемого контура. В действительности всегда в какой-то степени оба эти фактора имеют место.



В практическом отношении можно сделать вывод, что следует стремиться добиваться таких форм контура, при которых обеспечивались бы безотрывное обтекание и наименьшие воздействия сил вязкости; в этом случае, по-видимому, сила сопротивления будет наименьшей.

11.3. Обтекание решеток из произвольных профилей.

Рассмотрим некоторые особенности плоского потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости на примере обтекания реактивной решетки (рис. 11.3). Вследствие периодичности потока достаточно изучить течение в одном межлопаточном канале или обтекание одного профиля.

Самый простой способ построения плоского потенциального течения несжимаемой жидкости заключается в численном решении краевых задач для уравнения Лапласа относительно различных гармонических функций, связанных с течением. Решение находится во всей области течения (для решетки – в полосе одного перио-

да) путем последовательных приближений с применением различных вариантов известного метода сеток.

На рис. 11.3 сплошными кривыми изображены линии тока $\psi = const$; пунктирными кривыми показаны изопотенциальные линии $\phi = const$, нормальные к линиям тока.

Достаточно густая сеть этих линий хорошо характеризует течение.

Сопряженные гармонические функции $\phi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют в области течения уравнениям Лапласа:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad (11.9)$$

эквивалентным уравнению неразрывности и отсутствия вихрей.

Для уравнения Лапласа наиболее часто встречаются следующие *краевые задачи*.

Первая краевая задача (задача Дирихле). На контуре Γ , ограничивающем область G (рис. 11.4) задана непрерывная функция u $P = u(x, y)$. Требуется найти функцию ψ $P = \psi(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (11.9) и принимающую на границе заданные значения u P , то есть должны быть выполнены условия:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 \quad \text{при } P \in G, \\ \psi &= u \quad \text{при } P \in \Gamma. \end{aligned}$$

Вторая краевая задача (задача Неймана). На контуре Γ , ограничивающем область G задана непрерывная функция u_1 P . Требуется найти функцию ϕ $P = \phi(x, y)$, удовлетворяющую внутри G уравнению (11.9), нормальная производная которой на Γ принимает заданные значения u_1 P , то есть требуется, чтобы

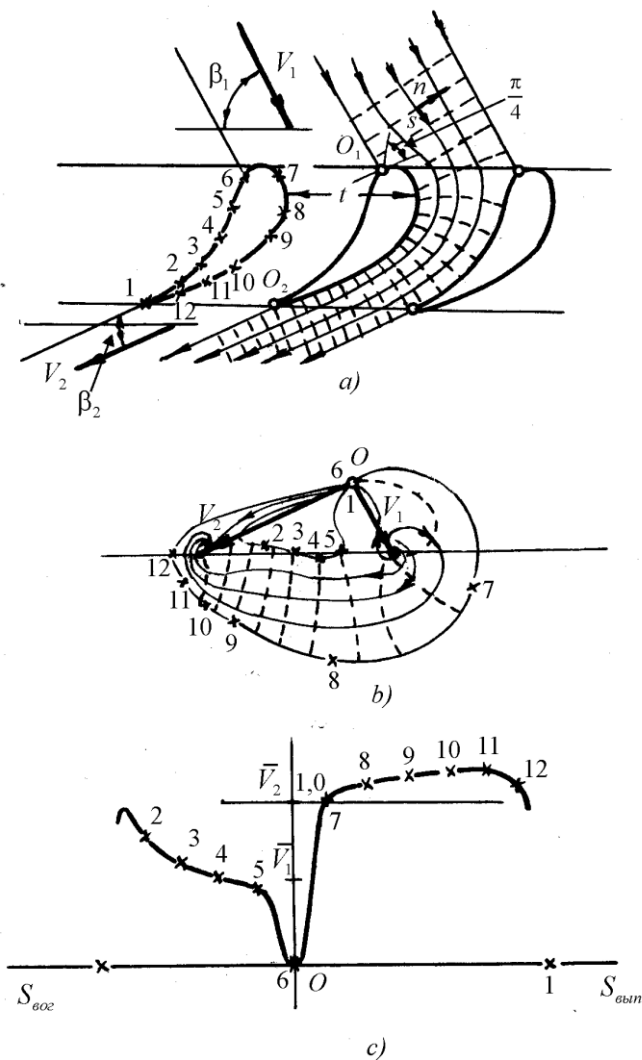


Рис. 11.3 – Течение идеальной несжимаемой жидкости через направляющую решётку:

- a) – линии равного потенциала и линии тока в решётке;
- b) – голограф скорости;
- c) – распределение относительных скоростей по обводу профиля.

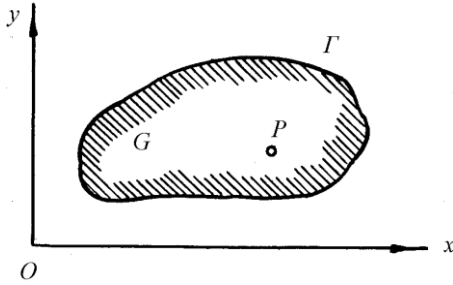


Рис. 11.4 – К определению краевых задач

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{при } P \in G,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u_1 \quad \text{при } P \in \Gamma.$$

Третья краевая задача – смешанная. По методу сеток уравнения (11.9) записываются в форме конечных разностей. Для получения конечно-разностного уравнения, соответствующего уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

достаточно, выбрав шаг $h > 0$, заменить производные $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ и $\partial^2 \varphi / \partial y^2$ отношениями конечных разностей по формулам

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi(x+h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi(x, y+h) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h)}{h^2}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\varphi(x+h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h, y)}{h^2} +$$

$$+ \frac{\varphi(x, y+h) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h)}{h^2} = 0.$$

Следовательно, получим

$$\varphi_{x,y} = \frac{1}{4} \left[\varphi_{x+h,y} + \varphi_{x-h,y} + \right. \\ \left. + \varphi_{x,y+h} + \varphi_{x,y-h} \right] \quad (11.10)$$

и, аналогично,

$$\psi_{x,y} = \frac{1}{4} \left[\psi_{x+h,y} + \psi_{x-h,y} + \right. \\ \left. + \psi_{x,y+h} + \psi_{x,y-h} \right], \quad (11.11)$$

где h – выбранный размер стороны клетки.

Расчет по методу сеток начинается с выбора функций φ_0 x, y или ψ_0 x, y исходного (нулевого) приближения. Для этого в области течения (в полосе одного периода решетки) наносится сеть линий тока $\psi = const$ и эквипотенциальных линий $\varphi = const$ (рис. 11.3а). Касательные к линиям тока совпадают с направлениями векторов скорости; эквипотенциальные линии пересекают линии тока под прямым углом. Исключение представляют критические точки O_1 , в которых линия тока, разветвляющаяся на гладком контуре, подходит к нему под прямым углом, а эквипотенциальная линия – под углом $\pi/4$ (см. рис. 11.3а). Если, как это обычно делают, линии тока и эквипотенциальные линии наносят через равные и постоянные значения $\Delta\varphi = \Delta\psi = const$, то образующаяся сеть течения должна быть квадратной.

Наконец, в соответствии с определением потенциала скорости и функции тока, проекции скорости на оси координат

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

а величина скорости

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\psi}{dn}$$

где производные $\frac{d}{ds}$ и $\frac{d}{dn}$ берутся, соответственно, по касательной к линии тока (s) или по нормали к ней (n).

Задача определения $\phi(x, y)$ сводится в каждом приближении к задаче Неймана, а задача определения $\psi(x, y)$ – к задаче Дирихле.

Метод сеток допускает удобную реализацию на электронных счетных машинах, так как применение его обычно сводится к массовой повторяемости однородных циклов.

Большое значение имеет возможно более точное задание исходного приближения, связанного с построением квадратной сети линий $\psi_0 = \text{const}$ и $\phi_0 = \text{const}$. Известны различные способы графического уточнения этой сети, которые целесообразно применить для ускорения последующих расчетов. Пусть приближенно построена некоторая (обязательно ортогональная) сеть (рис. 11.5), которая должна быть квадратной. Для ее уточнения можно воспользоваться тем, что сеть, составленная диагоналями квадратной сети, тоже должна быть квадратной. Проведем диагонали всех ячеек сети (эти диагонали, вообще говоря, должны быть криволинейными и плавно переходить из ячейки в ячейку). Рассматривая точки пересечения диагоналей (отмеченные кружками на рис. 11.5) как точки новой сети, построим на них еще одну диагональную сеть, узлы которой и дадут искомое уточнение линии тока исходной сети (штрих – пунктир на рис. 11.5). Повторение этого процесса, которое следует производить на новом чертеже, обычно дает вполне удовлетворительную сеть течения для исходного приближения расчетов по методу сеток.

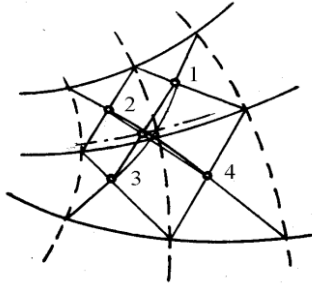


Рис. 11.5 – К построению ортогональных сетей

Другой важной характеристикой течения является план скоростей, или годограф скорости (рис. 11.3*b*).

Каждой линии тока и изопотенциальной линии соответствует в плоскости годографа геометрическое место концов векторов скорости на этой линии. Соответствующие геометрические места в плоскости годографа также образуют ортогональную сеть, которую можно считать сетью некоторого течения в плоскости годографа, ограниченного геометрическим местом концов векторов скорости на поверхности профиля и вызванного так называемым вихреисточником в конце вектора скорости V_1 на бесконечности до решетки и вихресток в конце вектора скорости V_2 за решеткой. Точки O_1 , V_1 и V_2 образуют треугольник скорости решетки. На основании равенства расходов жидкости до и за решеткой

$$\rho \cdot V_1 t \cdot \sin \beta_1 = V_2 t \cdot \sin \beta_2 \cdot \rho$$

следует, что проекции скоростей V_1 и V_2 на нормаль к фронту (оси) решетки равны или что прямая, проходящая через концы векторов V_1 и V_2 в плоскости годографа, параллельна фронту решетки.

Большой интерес представляет распределение скорости или давления на поверхности профиля. На рис. 11.3*c* показано примерное

распределение скоростей $\bar{V} = V/V_2$ в функции длины дуги профиля S . Распределение скоростей в точках обвода профиля существенно зависит от формы вогнутой и выпуклой поверхностей и степени сужения канала, а также геометрических и режимных параметров решетки.

Увеличение кривизны на выпуклых участках профиля приводит к увеличению скорости, и наоборот. При скачкообразном изменении кривизны, например в точках сопряжения дуг окружностей, теоретические кривые распределения скоростей претерпевают разрыв. Вследствие этого обводы профиля современных решеток выполняют с плавно изменяющейся кривизной.

11.4 Расчет потенциального потока в решетках по теории канала

В настоящее время разработаны методы расчета потенциального потока в решетках, использующие аппарат функций комплексного переменного. Методы расчёта потенциального обтекания идеальной несжимаемой жидкостью плоской решётки могут быть разделены на методы, основанные на конформном преобразовании области течения и на методы решения задачи, приводимые к интегральным уравнениям, записываемых относительно комплексной скорости или потенциала скорости (М.И. Жуковский “Аэродинамический расчёт потока в осевых турбомашинах”, Машиностроение, Л., 1967; Г.С. Самойлович, В.В. Нитусов “Сборник задач по гидроаэродинамике”, Машиностроение, М., 1986).

Приближённая оценка влияния сжимаемости рабочего тела производится с помощью соотношений, предложенных С.А. Христиановичем. Эти методы оказываются громоздкими.

Разработаны также значительно более простые способы расчета, позволяющие с достаточной точностью решать прямую и обратную задачу, основаны на теории канала. К настоящему времени известно несколько методов расчета решеток по теории канала. Одним из первых был предложен метод Г. Флюгеля, развитый позднее Г.Ю. Степановым.

Мы рассмотрим несколько видоизмененный метод А.Н. Шерстюка и Г.С. Самойловича.

Опытным путем они получили формулу

$$\frac{V}{V_{\text{вып}}} = \frac{1}{1 + \bar{z}} + \frac{\bar{z}}{\bar{h}} \cdot \frac{r}{1 + \bar{h}}, \quad (11.12)$$

где $r = \frac{\bar{h}}{2 + \bar{h}} \left(1 - \frac{1 + \bar{h}}{\bar{R}_{\text{гоз}}} \right)$, $\bar{z} = \frac{z}{R_{\text{вып}}}$, $\bar{R}_{\text{гоз}} = \frac{R_{\text{гоз}}}{R_{\text{вып}}}$, $\bar{h} = \frac{h}{R_{\text{вып}}}$.

Координата z изменяется от 0 до h (рис. 11.6).

Объемный расход

$$Q = \int_0^h V \cdot dz, \quad \frac{Q}{R_{\text{вып}}} = \int_0^{\bar{h}} V \cdot d\bar{z}.$$

Подставляя сюда значение V из (11.12), имеем

$$\frac{Q}{R_{\text{вып}}} = V_{\text{вып}} \left[\int_0^{\bar{h}} \frac{d\bar{z}}{1 + \bar{z}} + \int_0^{\bar{h}} \left(1 - \frac{1 + \bar{h}}{\bar{R}_{\text{гоз}}} \right) \frac{\bar{z} d\bar{z}}{1 + \bar{h}} \frac{1}{2 + \bar{h}} \right].$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{Q}{V_{\text{вып}} R_{\text{вып}}} &= \ln 1 + \bar{h} + \left(1 - \frac{1 + \bar{h}}{\bar{R}_{\text{гоз}}} \right) \frac{\bar{h}^2}{2} \frac{1}{1 + \bar{h}} \frac{1}{2 + \bar{h}} = \\ &= \ln 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2} \frac{1}{1 + \bar{h}} \frac{1}{2 + \bar{h}} - \frac{\bar{h}^2}{2 \bar{R}_{\text{гоз}}} \frac{1}{2 + \bar{h}}. \end{aligned}$$

Расчеты показывают, что

$$\ln 1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2(1 + \bar{h})} \approx \frac{\bar{h}}{1 + 0,29\bar{h}}.$$

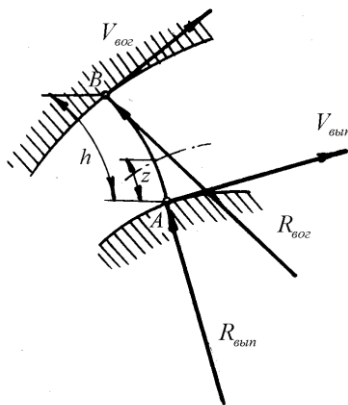


Рис. 11.6 – К расчёту потенциального потока в решётках по теории канала

Учитывая последнее и разделив правую и левую часть уравнения на $\bar{h} = h/R_{\text{вых}}$, получаем

$$\frac{Q}{V_{\text{вых}} R_{\text{вых}} h/R_{\text{вых}}} = \frac{1}{1 + 0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2(2 + \bar{h}) \bar{R}_{\text{вход}}}.$$

Обозначим $\frac{Q}{h} = V_{\text{ср}}$.

Тогда мы получаем

$$\frac{V_{\text{ср}}}{V_{\text{вых}}} = \frac{1}{1 + 0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2(2 + \bar{h}) \bar{R}_{\text{вход}}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на критическую скорость звука a_* получаем выражение для безразмерной скорости на выпуклой поверхности профиля

$$\lambda_{\text{вып}} = \frac{\lambda_{cp}}{\frac{1}{1 + 0,29\bar{h}} - \frac{\bar{h}}{2 + \bar{h} \bar{R}_{602}}} . \quad (11.13)$$

Для определения λ_{cp} , перейдя к решетке турбомашин с параметрами на выходе V_2 , λ_2 , ρ_2 , запишем уравнение неразрывности

$$\rho_2 \cdot V_2 \cdot A_e = V_{cp} \cdot \rho_{cp} \cdot h .$$

Разделив обе части равенства на $\rho_* \cdot V_*$, получаем

$$\frac{\rho_2 \cdot V_2}{\rho_* \cdot a_*} \cdot A_e = \frac{V_{cp} \cdot \rho_{cp}}{\rho_* \cdot a_*} \cdot h .$$

Или

$$q_{cp} = q_2 \frac{A_e}{h} , \quad (11.14)$$

где q_2 – приведенный расход в геометрическом горле лопаточного канала;

A_e – величина геометрического горла канала;

Используя (3.27) мы имеем выражение

$$q_{cp} = q_2 \frac{A_e}{h} = \lambda_{cp} \left[\left(\frac{k+1}{2} \right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{cp}^2 \right) \right]^{\frac{1}{k-1}} .$$

Искомое значение λ_{cp} определяется с помощью этой формулы или с помощью таблиц газодинамических функций по вычисленному значению q_{cp} .

Подстановкой значения $\bar{z} = \bar{h}$ в формулу (11.12) получаем распределение скоростей на вогнутой стенке канала

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{гоз}}}{V_{\text{бын}}} \frac{a_*$$

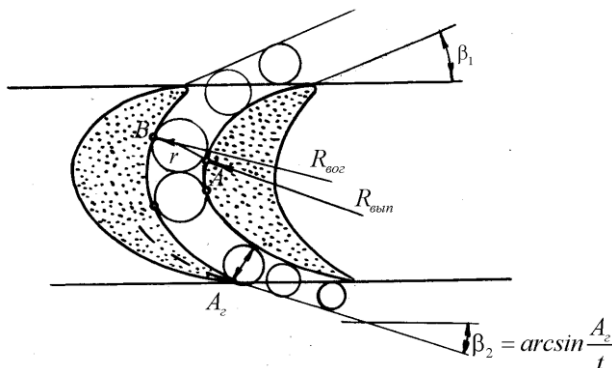


Рис. 11.7 – Выбор граничных линий тока при расчёте потенциального потока в решётках по теории канала

Методика расчета скорости сводится к следующему:

1. В канал вписываются окружности (рис. 11.7). Через точки касания этих окружностей со стенками канала A и B проводятся эквипотенциальные линии $h = 2r$. Определяются радиусы кривых граничных линий в точках A и B ($R_{\text{вып}}$ и $R_{\text{вог}}$).
2. Для каждой эквипотенциальной линии вычисляются безразмерные геометрические параметры

$$\bar{h} = \frac{2r}{R_{\text{вып}}}, \quad \bar{R} = \frac{R_{\text{вог}}}{R_{\text{вып}}}.$$

3. Определяются параметры газа на выходе из решетки $\lambda_2 = V_2/a_*$; приведенный расход $q_2 = q \lambda_2$ по таблицам газодинамических функций.
4. Определяются средние приведенные расходы q_{cp} по формуле (11.14) и $\lambda_{\text{cp}} = \lambda q_{\text{cp}}$ по таблицам газодинамических функций.

1. Скорость (безразмерная, а по ней - размерная) в точке A определяются по формуле (11.13).
2. Скорость газа в точке B определяется соотношением (11.15).

Описанный выше метод справедлив для расчета сжимаемой и несжимаемой жидкости при дозвуковом течении.

11.5 Профилирование дозвуковых профилей.

Как правило дозвуковые профили могут формировать периферийный участок сопловых лопаток и прикорневую область рабочей лопатки. Один из способов построения дозвуковых профилей, а также дозвуковой части реактивных трансзвуковых и сверхзвуковых профилей основан на использовании вышеприведенных формул расчета потенциального течения в криволинейных каналах.

Для этого необходимо задаться наивыгоднейшим распределением скорости по обводу профиля (рис. 11.8а), а также плавным законом изменения h (или, что одно и то же, изменением диаметров вписанных в канал окружностей) (рис. 11.8б).

Однако этот способ не очень удачен, так как не всегда удастся замкнуть профиль.

Весьма широко используется лемнискатный метод построения дозвуковых профилей (см. М.Е. Дейч, Г.А. Филиппов, Л.Я. Лазарев «Атлас профилей решеток новых турбин», 1965 г.).

Уравнение лемнискаты Бернулли

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

обеспечивает плавное изменение обводов профиля.

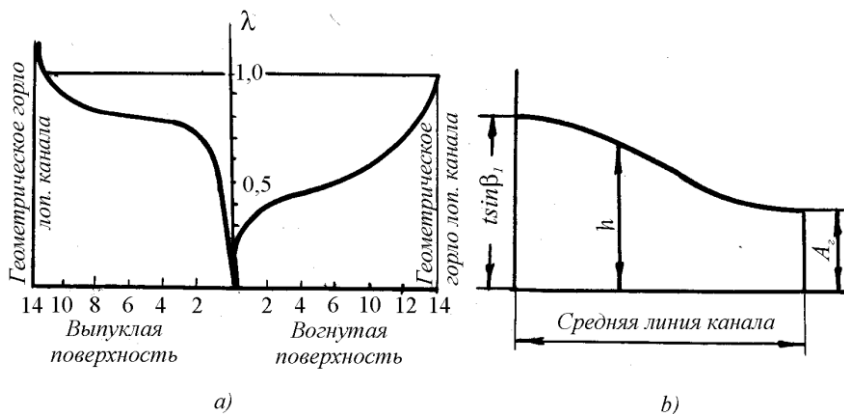


Рис. 11.8 – К профилированию дозвуковых профилей

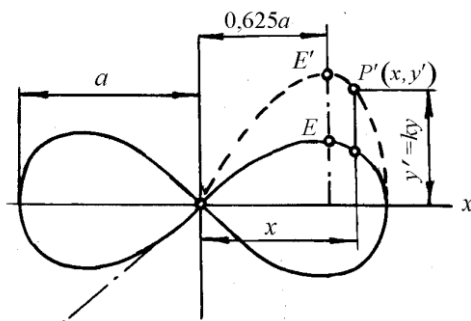


Рис. 11.9 – Построение дозвуковых профилей с помощью лемнискаты Бернулли

Изменяя масштаб координаты

$$y' = ky,$$

можно смещать точку E (рис. 11.9) по прямой $x = 0,625a$ (где a – расстояние от начала координат до пересечения лемнискаты с осью x), обеспечивая желаемую форму профилей. На вогнутой поверхности лемниската может быть заменена дугами окружностей. При построении выпуклой поверхности элемент ее, находящийся в

пределах косого среза, можно достраивать по прямой линии. Радиусы входной и выходной кромки выбираются конструктивно.

Этот способ позволяет построить профиль практически для любой степени реактивности.

Часто для расчетов потоков сжимаемой жидкости используют формулы и методы расчета несжимаемой жидкости. При этом основываются на методе малых возмущений:

(i) увеличивают в масштабе $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$ углы входа и выхода

$$\operatorname{tg}\beta_1'' = \operatorname{tg}\beta_1 / \sqrt{1-M_\infty^2},$$

(ii) утолщают профиль $b_n = b / \sqrt{1-M_\infty^2}$,

(iii) шаг и хорду профиля оставляют неизменными.

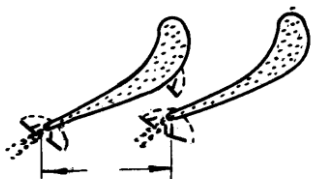
M_∞ – число M набегающего потока.

11.6 Структура потока в реактивных решетках при околозвуковых и сверхзвуковых скоростях

В реактивных решетках скорости на входе дозвуковые; переход к сверхзвуковым скоростям происходит в межлопаточной канале.

Во многих случаях переход в околозвуковую область сопровождается значительным изменением характеристик решеток. В этой связи необходимо знать критическое число $M_{кр}$, при котором в решетке появляются местные области сверхзвуковых скоростей. Для решеток существует такой шаг t_* , при котором звуковые скорости достигаются одновременно у спинки и в области кромки. Значение $M_{кр}$ для решетки, положение и протяженность сверхзвуковой области зависят от формы профиля (кривизны выходного участка спинки, толщины и формы кромки). С

увеличением $M_2 > M_{кр}$ сверхзвуковая область увеличивается и граница ее смещается внутрь канала.



При числе $M_2 \approx 1$ линия перехода приблизительно совпадает с узким сечением канала и сверхзвуковая область на спинке профиля соединяется с областью сверхзвуковых скоростей за выходной кромкой. При этом

$$p_2/p_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon_*.$$

При сверхкритических перепадах давлений в решетке в зоне узкого сечения межлопаточного канала устанавливается критическая скорость. В действительности вследствие неравномерности потока в канале и влияния вязкости поверхность перехода имеет некоторую кривизну и смещается против потока. За выходной кромкой давление ниже критического $\varepsilon_2 < \varepsilon_*$, поэтому при обтекании кромки в косом срезе сопла распространяется волна разрежения ABC (рис. 11.10а). В первично отраженных от спинки профиля волнах разрежения поток перерасширяется. Перерасширение потока «исправляется» скачком уплотнения FC и его отражением на спинке профиля в косом срезе.

Граничные струйки газа, сходящие с вогнутой и выпуклой поверхностей профиля, сближаются и на некотором расстоянии за кромкой резко поворачиваются. Возникает скачок FH (рис. 11.10а).

С увеличением перепада давлений увеличивается протяженность и интенсивность первичной волны разрежения, точка падения косога скачка FC на спину профиля (точка C) смещается по потоку.

Расширение потока в косом срезе решетки заканчивается при отношении давлений $\varepsilon_2 = \varepsilon_s$; можно считать предельный такой режим, при котором первичный скачок попадает в точку D (рис. 11.10*b*). В этом случае вместо трех скачков образуются только два: отраженный скачок CP сливается с кромочным FH .

При уменьшении давления $\varepsilon_2 < \varepsilon_s$ первичный скачок FC попадает в сверхзвуковую часть кромочного следа (рис. 11.10*c*). При этом обтекание выходной кромки профиля и кромочное давление определяются только геометрическими параметрами решетки и не зависят от противодавления.

11.7 Профилирование сверхзвуковых профилей.

Косой срез целесообразно проектировать так, чтобы обеспечить увеличение проходных сечений расширяющемуся сверхзвуковому потоку.

Наиболее строгое решение можно получить, если, при обеспечении течения Прандтля-Майера в косом срезе, в качестве граничных условий принять равенство по модулю и направлению векторов скорости на выходной кромке профиля по обе его стороны. Тогда построение профиля сведется к задаче о нахождении линии тока в течении Прандтля-Майера по заданным параметрам потока на выходе из решетки.

Заданными величинами являются: направление потока на входе в решетку и на выходе из нее α_0 β_1 и α_1 β_2 , шаг профилей t , ширина решетки B , геометрическое горло лопаточного канала A_2 , число Маха за решеткой M_2 (или λ_2).

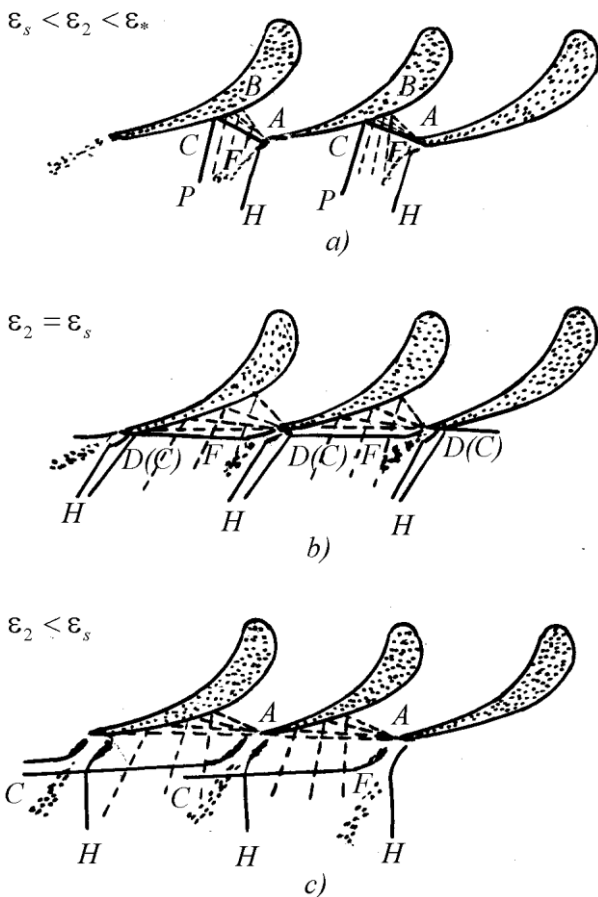


Рис. 11.10 – Схемы течения газа в направляющей решётке при сверхзвуковых скоростях

На линии, проходящей через выходные кромки профилей (см. рис. 11.11) откладывается величина

$$AB = t - \Delta.$$

Линия начала отсчета проводится под углом

где δ определяется по формуле (7.18) или (7.20)

$$\delta = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \lambda_2^2}} - \arctg \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC имеем

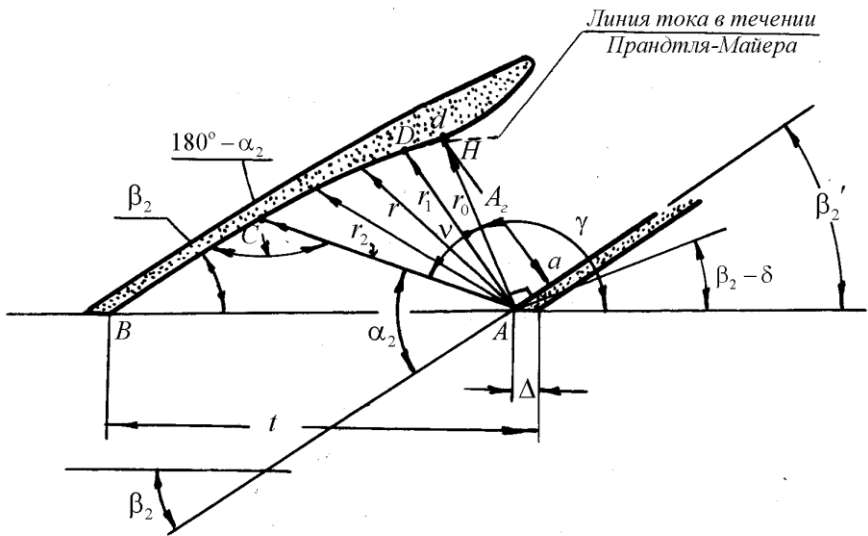


Рис. 11.11 – Построение сверхзвуковой решётки профилей

$$\frac{r_2}{\sin \beta_2} = \frac{t - \Delta}{\sin 180^\circ - \alpha_2} = \frac{t - \Delta}{\sin \alpha_2}.$$

Используя формулу Прандтля-Майера (7.23) имеем

$$r_2 = r_0 \sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

Подставляя последнее выражение для r_2 в выше полученное по теореме синусов, получаем

$$r_0 = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} \frac{t - \Delta}{\sqrt{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}}. \quad (11.16)$$

Разбивая v на конечное число углов можно построить поверхность профиля в косом срезе по линии тока в течении Прандтля-Майера по формуле (7.23).

Для выполнения граничных условий направление дозвуковой поверхности от выходной кромки следует выполнить под углом

$$\beta'_2 = \beta_2 - \delta.$$

Однако при этом получается уступ, не желательный с точки зрения технологических соображений при изготовлении лопатки. Поэтому часто идут на отступление от принятых граничных условий с целью обеспечения клинообразной выходной кромки. Направление дозвуковой поверхности выполняется под углом

$$\beta'_2 = \beta_2 + 0 \div 2^\circ. \quad (11.17)$$

При таком построении геометрическое горло лопаточного канала смещается вверх по потоку. Наилучшим его положением является положение ближайшее к выходной кромке.

Для обеспечения заданных размеров геометрического горла сочленение элемента профиля в косом срезе, выполненного по линии тока в течении Прандтля-Майера, с дозвуковым элементом следует осуществить дугой окружности с достаточно большим радиусом. Эту сопрягающую дугу следует проводить не из точки H ,

соответствующей концу вектора r_0 , а из точки D , которая находится на конце вектора r_1 , подсчитанного по формуле (7.23) для значения v_1 , вычисленного для $\delta_1 = 1^\circ$. Дуга должна проходить из точки D через конец отрезка A_2 , который проведен через точку H перпендикулярно линии, исходящей из точки A и формирующей выходную кромку профиля. При таком построении получается некоторый начальный расходящийся участок сверхзвукового канала $adDA$, где происходит частичное срабатывание теплоперепада, приходящегося на косой срез. Остальная его часть срабатывается в косом срезе, ограниченном по линии в течения Прандтля-Майера.

Такое формирование лопаточного канала улучшает характеристики профиля в условиях переменного режима истечения.

Дозвуковая часть лопаточного канала строится по методу профилирования дозвуковых профилей.

Решетки профилей с большим углом выноса и шаговым отношением близким к единице строятся также по описанной здесь методике, а дозвуковая часть лопаточного канала строится путем сочетания отрезков дуг и прямых линий так, чтобы радиусы окружностей, вписанных в лопаточный канал, плавно уменьшались по мере приближения к критическому сечению.

Подбор дуг для оформления дозвуковых элементов профиля следует осуществить так, чтобы радиусы их кривизны увеличивались по мере приближения к геометрическому горлу лопаточного канала.

Для профилей, у которых скелетная линия близка к прямолинейной, наивыгоднейшим является нулевой угол атаки. При криволинейной скелетной линии профиля, имеющего резкое нарастание толщины вблизи входной кромки, целесообразно обеспечивать не-

который угол атаки порядка $2 \div 3^\circ$, а иногда и до $10 \div 15^\circ$ в сторону выпуклости профиля.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите классификацию решёток турбомашин.
2. Выведите теорему Н.Е. Жуковского для решётки профилей.
3. Сделайте расчёт потенциального потока в решётке по теории канала.
4. Опишите структуру потока в реактивных решётках при околосзвуковых и сверхзвуковых скоростях.
5. Опишите изложенные в главе методы профилирования до- и сверхзвуковых профилей.

Список литературы

1. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. “Аэродинамика”, Оборонгиз, М., 1952.
2. Борисенко А.И. “Газовая динамика двигателей”, Оборонгиз, М., 1962.
3. Дейч М.Е. “Техническая газодинамика”, Изд-во “Энергия”, М., 1974.
4. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. “Гидрогазодинамика”, Энергоатомиздат, М., 1984.
5. Лойцянский Л.Г. “Механика жидкости и газа”, Изд-во “Наука”, М., 1970.
6. Л. Прандль-О. Титъенс. “Гидро- и аэродинамика”, ОНТИ НКТП СССР, М.-Л., 1935.
7. Самойлович Г.С. “Гидрогазодинамика”, Машиностроение, М., 1990.
8. Ascher H. Shapiro. “The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow”, The Ronald Press Company, New York, 1953.
9. Фабрикант Н.Я. “Аэродинамика”, Изд-во “Наука”, М., 1964.

Приложения

Некоторые сведения по единицам измерения:

давления:

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 10^{-5} \text{ бар}; \quad 1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Н/м}^2 = 10^5 \text{ Па};$$

$$1 \text{ бар} = 0,986923 \text{ атм} = 750,062 \text{ мм.рт.ст.};$$

$$1 \text{ атм} = 1,01325 \text{ бар} = 0,101325 \text{ МПа} = 760 \text{ мм.рт.ст.};$$

$$1 \text{ psia} = 0,06895 \text{ бар}.$$

температуры:

$$1^\circ \text{C} = 1\text{K} = 1,8\text{F} = 1,8\text{R};$$

$$\text{R} = \text{F} + 459,7; \text{F} = 1,8^\circ \text{C} + 32; ^\circ \text{C} = (\text{F} - 32)/1,8..$$

длины:

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ м}; \quad 1 \text{ inch} = 25,4 \text{ мм}.$$

массы:

$$1 \text{ Lbm} = 0,45359 \text{ кг}.$$

Для воздуха:

$$R = 287 \frac{\ddot{A}a}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{E}} = 287 \frac{\dot{I} \cdot \dot{i}}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{E}}; \quad 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$c_\delta = 1004,5 \frac{\ddot{A}a}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{E}}; \quad c_v = 711,5 \frac{\ddot{A}a}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{E}}.$$

Стандартные условия для сухого воздуха:

$$T = 288\text{K}; \quad t = 15^\circ \text{C};$$

$$p = 1,01325 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ атм} = 0,101325 \text{ МПа}; \quad \rho = 1,23 \text{ кг/м}^3.$$

Некоторые сведения из векторного анализа

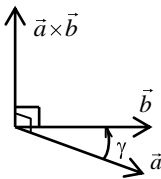
$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}.$$

Скалярное произведение двух векторов – скаляр

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Векторное произведение двух векторов – вектор

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \vec{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j} (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \\ &+ \vec{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1); \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \gamma. \end{aligned}$$



Обозначим \vec{V} – вектор скорости

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k};$$

ρ – скалярная функция.

Тогда:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad - \quad \text{скаляр},$$

$$\text{grad } \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k} \quad - \quad \text{вектор}.$$

Дифференциальный оператор “набла”

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k};$$

$$\text{grad} \rho = \vec{\nabla} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k}.$$

Дифференциальный оператор “дельта”

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который называют оператор Лапласа.

$$\Delta \rho = \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0 \text{ — уравнение Лапласа.}$$

Выражение слева называется Лапласианом ρ .

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\begin{aligned} \text{div grad} \rho &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}; \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \rho; \end{aligned}$$

То есть

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \rho.$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).
 \end{aligned}$$

Дифференциальные операции второго порядка

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} a^2 = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{a} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{a};$$

$$\operatorname{div} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b};$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} + \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a};$$

$$\operatorname{grad} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b}.$$

Таблица 1

Газодинамические функции одномерного изозэнтропийного потока
идеального газа ($k = 1,4$)

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
0	0	1,00000	1,00000	1,00000	∞	∞
,01	,01096	,99993	,99995	,99998	57,874	57,870
,02	,02191	,99972	,99980	,99992	28,942	28,934
,03	,03286	,99937	,99955	,99982	19,300	19,288
,04	,04381	,99888	,99920	,99968	14,482	14,465
,05	,05476	,99825	,99875	,99950	11,5915	11,5712
,06	,06570	,99748	,99820	,99928	9,6659	9,6415
,07	,07664	,99658	,99755	,99902	8,2915	8,2631
,08	,08758	,99553	,99680	,99872	7,2616	7,2291
,09	,09851	,99435	,99596	,99838	6,4613	6,4248
,10	,10943	,99303	,99502	,99800	5,8218	5,7812
,11	,12035	,99157	,99398	,99758	5,2992	5,2546
,12	,13126	,98998	,99284	,99714	4,8643	4,8157
,13	,14216	,98826	,99160	,99664	4,4968	4,4440
,14	,15306	,98640	,99027	,99610	4,1824	4,1255
,15	,16395	,98441	,98884	,99552	3,9103	3,8493
,16	,17483	,98228	,98731	,99490	3,6727	3,6076
,17	,18569	,98003	,98569	,99425	3,4635	3,3943
,18	,19654	,97765	,98398	,99356	3,2779	3,2046
,19	,20738	,97514	,98217	,99283	3,1122	3,0348
,20	,21822	,97250	,98027	,99206	2,9635	2,8820
,21	,22904	,96973	,97828	,99125	2,8293	2,7437
,22	,23984	,96685	,97621	,99041	2,7076	2,6178
,23	,25063	,96383	,97403	,98953	2,5968	2,5029
,24	,26141	,96070	,97177	,98861	2,4956	2,3975
,25	,27216	,95745	,96942	,98765	2,4027	2,3005
,26	,28291	,95408	,96699	,98666	2,3173	2,2109
,27	,29364	,95060	,96446	,98563	2,2385	2,1279
,28	,30435	,94700	,96185	,98456	2,1656	2,0508
,29	,31504	,94329	,95916	,98346	2,0979	1,9789
,30	,32572	,93947	,95638	,98232	2,0351	1,9119
,31	,33638	,93554	,95352	,98114	1,9765	1,8491

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
,32	,34701	,93150	,95058	,97993	1,9218	1,7902
,33	,35762	,92736	,94756	,97868	1,8707	1,7348
,34	,36821	,92312	,94446	,97740	1,8229	1,6828
,35	,37879	,91877	,94128	,97608	1,7780	1,6336
,36	,38935	,91433	,93803	,97473	1,7358	1,5871
,37	,39988	,90979	,93470	,97335	1,6961	1,5431
,38	,41039	,90516	,93129	,97193	1,6587	1,5014
,39	,42087	,90044	,92782	,97048	1,6234	1,4618
,40	,43133	,89562	,92428	,96899	1,5901	1,4241
,41	,44177	,89071	,92066	,96747	1,5587	1,3883
,42	,45218	,88572	,91697	,96592	1,5289	1,3542
,43	,46256	,88065	,91322	,96434	1,5007	1,3216
,44	,47292	,87550	,90940	,96272	1,4740	1,2905
,45	,48326	,87027	,90552	,96108	1,4487	1,2607
,46	,49357	,86496	,90157	,95940	1,4246	1,2322
,47	,50385	,85958	,89756	,95769	1,4018	1,2050
,48	,51410	,85413	,89349	,95595	1,3801	1,1788
,49	,52432	,84861	,88936	,95418	1,3594	1,1537
,50	,53452	,84302	,88517	,95238	1,3398	1,12951
,51	,54469	,83737	,88092	,95055	1,3212	1,10631
,52	,55482	,83166	,87662	,94869	1,3034	1,08397
,53	,56493	,82589	,87227	,94681	1,2864	1,06245
,54	,57501	,82005	,86788	,94489	1,2703	1,04173
,55	,58506	,81416	,86342	,94295	1,2550	1,02174
,56	,59508	,80822	,85892	,94098	1,2403	1,00244
,57	,60506	,80224	,85437	,93898	1,2263	,98381
,58	,61500	,79621	,84977	,93696	1,2130	,96581
,59	,62491	,79012	,84513	,93491	1,2003	,94839
,60	,63480	,78400	,84045	,93284	1,1882	,93155
,61	,64466	,77784	,83573	,93074	1,1766	,91525
,62	,65448	,77164	,83096	,92861	1,1656	,89946
,63	,66427	,76540	,82616	,92646	1,1551	,88416
,64	,67402	,75913	,82132	,92428	1,1451	,86932
,65	,68374	,75283	,81644	,92208	1,1356	,85493
,66	,69342	,74650	,81153	,91986	1,1265	,84096

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
,67	,70307	,74014	,80659	,91762	1,1178	,82740
,68	,71268	,73376	,80162	,91535	1,1096	,81421
,69	,72225	,72735	,79662	,91306	1,1018	,80141
,70	,73179	,72092	,79158	,91075	1,09437	,78896
,71	,74129	,71448	,78652	,90842	1,08729	,77685
,72	,75076	,70802	,78143	,90606	1,08057	,76507
,73	,76019	,70155	,77632	,90368	1,07419	,75360
,74	,76958	,69507	,77119	,90129	1,06814	,74243
,75	,77893	,68857	,76603	,89888	1,06242	,73155
,76	,78825	,68207	,76086	,89644	1,05700	,72095
,77	,79753	,67556	,75567	,89399	1,05188	,71062
,78	,80677	,66905	,75046	,89152	1,04705	,70054
,79	,81597	,66254	,74524	,88903	1,04250	,69070
,80	,82514	,65602	,74000	,88652	1,03823	,68110
,81	,83426	,64951	,73474	,88400	1,03422	,67173
,82	,84334	,64300	,72947	,88146	1,03046	,66259
,83	,85239	,63650	,72419	,87890	1,02696	,65366
,84	,86140	,63000	,71890	,87633	1,02370	,64493
,85	,87037	,62351	,71361	,87374	1,02067	,63640
,86	,87929	,61703	,70831	,87114	1,01787	,62806
,87	,88817	,61057	,70300	,86852	1,01530	,61991
,88	,89702	,60412	,69769	,86589	1,01294	,61193
,89	,90583	,59768	,69237	,86324	1,01080	,60413
,90	,91460	,59126	,68704	,86058	1,00886	,59650
,91	,92333	,58486	,68171	,85791	1,00713	,58903
,92	,93201	,57848	,67639	,85523	1,00560	,58171
,93	,94065	,57212	,67107	,85253	1,00426	,57455
,94	,94925	,56578	,66575	,84982	1,00311	,56754
,95	,95781	,55946	,66044	,84710	1,00214	,56066
,96	,96633	,55317	,65513	,84437	1,00136	,55392
,97	,97481	,54691	,64982	,84162	1,00076	,54732
,98	,98325	,54067	,64452	,83887	1,00033	,54085
,99	,99165	,53446	,63923	,83611	1,00008	,53450
1,00	1,00000	,52828	,63394	,83333	1,00000	,52828
1,01	1,00831	,52213	,62866	,83055	1,00008	,52218

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
1,02	1,01658	,51602	,62339	,82776	1,00033	,51619
1,03	1,02481	,50994	,61813	,82496	1,00074	,51031
1,04	1,03300	,50389	,61288	,82215	1,00130	,50454
1,05	1,04114	,49787	,60765	,81933	1,00202	,49888
1,06	1,04924	,49189	,60243	,81651	1,00290	,49332
1,07	1,05730	,48595	,59722	,81368	1,00394	,48787
1,08	1,06532	,48005	,59203	,81084	1,00512	,48251
1,09	1,07330	,47418	,58685	,80800	1,00645	,47724
1,10	1,08124	,46835	,58169	,80515	1,00793	,47206
1,11	1,08914	,46256	,57655	,80230	1,00955	,46698
1,12	1,09699	,45682	,57143	,79944	1,01131	,46199
1,13	1,10480	,45112	,56632	,79657	1,01322	,45708
1,14	1,11256	,44545	,56123	,79370	1,01527	,45225
1,15	1,1203	,43983	,55616	,79083	1,01746	,44751
1,16	1,1280	,43425	,55112	,78795	1,01978	,44284
1,17	1,1356	,42872	,54609	,78507	1,02224	,43825
1,18	1,1432	,42323	,54108	,78218	1,02484	,43374
1,19	1,1508	,41778	,53610	,77929	1,02757	,42930
1,20	1,1583	,41238	,53114	,77640	1,03044	,42493
1,21	1,1658	,40702	,52620	,77350	1,03344	,42063
1,22	1,1732	,40171	,52129	,77061	1,03657	,41640
1,23	1,1806	,39645	,51640	,76771	1,03983	,41224
1,24	1,1879	,39123	,51154	,76481	1,04323	,40814
1,25	1,1952	,38606	,50670	,76190	1,04676	,40411
1,26	1,2025	,38094	,50189	,75900	1,05041	,40014
1,27	1,2097	,37586	,49710	,75610	1,05419	,39622
1,28	1,2169	,37083	,49234	,75319	1,05810	,39237
1,29	1,2240	,36585	,48761	,75029	1,06214	,38858
1,30	1,2311	,36092	,48291	,74738	1,06631	,38484
1,31	1,2382	,35603	,47823	,74448	1,07060	,38116
1,32	1,2452	,35119	,47358	,74158	1,07502	,37754
1,33	1,2522	,34640	,46895	,73867	1,07957	,37397
1,34	1,2591	,34166	,46436	,73577	1,08424	,37044
1,35	1,2660	,33697	,45980	,73287	1,08904	,36697
1,36	1,2729	,33233	,45527	,72997	1,09397	,36355
1,37	1,2797	,32774	,45076	,72707	1,09902	,36018
1,38	1,2865	,32319	,44628	,72418	1,10420	,35686

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
1,39	1,2932	,31869	,44183	,72128	1,10950	,35359
1,40	1,2999	,31424	,43742	,71839	1,1149	,35036
1,41	1,3065	,30984	,43304	,71550	1,1205	,34717
1,42	1,3131	,30549	,42869	,71261	1,1262	,34403
1,43	1,3197	,30119	,42436	,70973	1,1320	,34093
1,44	1,3262	,29693	,42007	,70685	1,1379	,33787
1,45	1,3327	,29272	,41581	,70397	1,1440	,33486
1,46	1,3392	,28856	,41158	,70110	1,1502	,33189
1,47	1,3456	,28445	,40738	,69823	1,1565	,32896
1,48	1,3520	,28039	,40322	,69537	1,1629	,32607
1,49	1,3583	,27637	,39909	,69251	1,1695	,32321
1,50	1,3646	,27240	,39498	,68965	1,1762	,32039
1,51	1,3708	,26848	,39091	,68680	1,1830	,31761
1,52	1,3770	,26461	,38687	,68396	1,1899	,31487
1,53	1,3832	,26078	,38287	,68112	1,1970	,31216
1,54	1,3894	,25700	,37890	,67828	1,2042	,30948
1,55	1,3955	,25326	,37496	,67545	1,2115	,30685
1,56	1,4016	,24957	,37105	,67262	1,2190	,30424
1,57	1,4076	,24593	,36717	,66980	1,2266	,30167
1,58	1,4135	,24233	,36332	,66699	1,2343	,29913
1,59	1,4195	,23878	,35951	,66418	1,2422	,29662
1,60	1,4254	,23527	,35573	,66138	1,2502	,29414
1,61	1,4313	,23181	,35198	,65858	1,2583	,29169
1,62	1,4371	,22839	,34826	,65579	1,2666	,28928
1,63	1,4429	,22501	,34458	,65301	1,2750	,28690
1,64	1,4487	,22168	,34093	,65023	1,2835	,28454
1,65	1,4544	,21839	,33731	,64746	1,2922	,28221
1,66	1,4601	,21515	,33372	,64470	1,3010	,27991
1,67	1,4657	,21195	,33016	,64194	1,3099	,27764
1,68	1,4713	,20879	,32664	,63919	1,3190	,27540
1,69	1,4769	,20567	,32315	,63645	1,3282	,27318
1,70	1,4825	,20259	,31969	,63372	1,3376	,27099
1,71	1,4880	,19955	,31626	,63099	1,3471	,26882
1,72	1,4935	,19656	,31286	,62827	1,3567	,26668
1,73	1,4989	,19361	,30950	,62556	1,3665	,26457
1,74	1,5043	,19070	,30617	,62286	1,3764	,26248
1,75	1,5097	,18782	,30287	,62016	1,3865	,26042
1,76	1,5150	,18499	,29959	,61747	1,3967	,25838
1,77	1,5203	,18220	,29635	,61479	1,4071	,25636

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
1,78	1,5256	,17944	,29314	,61211	1,4176	,25436
1,79	1,5308	,17672	,28997	,60945	1,4282	,25239
1,80	1,5360	,17404	,28682	,60680	1,4390	,25044
1,81	1,5412	,17140	,28370	,60415	1,4499	,24851
1,82	1,5463	,16879	,28061	,60151	1,4610	,24660
1,83	1,5514	,16622	,27756	,59888	1,4723	,24472
1,84	1,5564	,16369	,27453	,59626	1,4837	,24286
1,85	1,5614	,16120	,27153	,59365	1,4952	,24102
1,86	1,5664	,15874	,26857	,59105	1,5069	,23919
1,87	1,5714	,15631	,26563	,58845	1,5188	,23739
1,88	1,5763	,15392	,26272	,58586	1,5308	,23561
1,89	1,5812	,15156	,25984	,58329	1,5429	,23385
1,90	1,5861	,14924	,25699	,58072	1,5552	,23211
1,91	1,5909	,14695	,25417	,57816	1,5677	,23039
1,92	1,5957	,14469	,25138	,57561	1,5804	,22868
1,93	1,6005	,14247	,24862	,57307	1,5932	,22699
1,94	1,6052	,14028	,24588	,57054	1,6062	,22532
1,95	1,6099	,13813	,24317	,56802	1,6193	,22367
1,96	1,6146	,13600	,24049	,56551	1,6326	,22204
1,97	1,6193	,13390	,23784	,56301	1,6461	,22042
1,98	1,6239	,13184	,23522	,56051	1,6597	,21882
1,99	1,6285	,12981	,23262	,55803	1,6735	,21724
2,00	1,6330	,12780	,23005	,55556	1,6875	,21567
2,01	1,6375	,12583	,22751	,55310	1,7017	,21412
2,02	1,6420	,12389	,22499	,55064	1,7160	,21259
2,03	1,6465	,12198	,22250	,54819	1,7305	,21107
2,04	1,6509	,12009	,22004	,54576	1,7452	,20957
2,05	1,6553	,11823	,21760	,54333	1,7600	,20808
2,06	1,6597	,11640	,21519	,54091	1,7750	,20661
2,07	1,6640	,11460	,21281	,53850	1,7902	,20515
2,08	1,6683	,11282	,21045	,53611	1,8056	,20371
2,09	1,6726	,11107	,20811	,53373	1,8212	,20228
2,10	1,6769	,10935	,20580	,53135	1,8369	,20087
2,11	1,6811	,10766	,20352	,52898	1,8529	,19947
2,12	1,6853	,10599	,20126	,52663	1,8690	,19809
2,13	1,6895	,10434	,19902	,52428	1,8853	,19672
2,14	1,6936	,10272	,19681	,52194	1,9018	,19537
2,15	1,6977	,10113	,19463	,51962	1,9185	,19403
2,16	1,7018	,09956	,19247	,51730	1,9354	,19270

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,17	1,7059	,09802	,19033	,51499	1,9525	,19138
2,18	1,7099	,09650	,18821	,51269	1,9698	,19008
2,19	1,7139	,09500	,18612	,51041	1,9873	,18879
2,20	1,7179	,09352	,18405	,50813	2,0050	,18751
2,21	1,7219	,09207	,18200	,50586	2,0229	,18624
2,22	1,7258	,09064	,17998	,50361	2,0409	,18499
2,23	1,7297	,08923	,17798	,50136	2,0592	,18375
2,24	1,7336	,08784	,17600	,49912	2,0777	,18252
2,25	1,7374	,08648	,17404	,49689	2,0964	,18130
2,26	1,7412	,08514	,17211	,49468	2,1154	,18009
2,27	1,7450	,08382	,17020	,49247	2,1345	,17890
2,28	1,7488	,08252	,16830	,49027	2,1538	,17772
2,29	1,7526	,08123	,16643	,48809	2,1734	,17655
2,30	1,7563	,07997	,16458	,48591	2,1931	,17539
2,31	1,7600	,07873	,16275	,48374	2,2131	,17424
2,32	1,7637	,07751	,16095	,48158	2,2333	,17310
2,33	1,7673	,07631	,15916	,47944	2,2537	,17197
2,34	1,7709	,07513	,15739	,47730	2,2744	,17085
2,35	1,7745	,07396	,15564	,47517	2,2953	,16975
2,36	1,7781	,07281	,15391	,47305	2,3164	,16866
2,37	1,7817	,07168	,15220	,47095	2,3377	,16757
2,38	1,7852	,07057	,15052	,46885	2,3593	,16649
2,39	1,7887	,06948	,14885	,46676	2,3811	,16543
2,40	1,7922	,06840	,14720	,46468	2,4031	,16437
2,41	1,7957	,06734	,14557	,46262	2,4254	,16332
2,42	1,7991	,06630	,14395	,46056	2,4479	,16229
2,43	1,8025	,06527	,14235	,45851	2,4706	,16126
2,44	1,8059	,06426	,14078	,45641	2,4936	,16024
2,45	1,8093	,06327	,13922	,45444	2,5168	,15923
2,46	1,8126	,06229	,13768	,45242	2,5403	,15823
2,47	1,8159	,06133	,13616	,45041	2,5640	,15724
2,48	1,8192	,06038	,13465	,44841	2,5880	,15626
2,49	1,8225	,05945	,13316	,44642	2,6122	,15528
2,50	1,8258	,05853	,13169	,44444	2,6367	,15432
2,51	1,8290	,05763	,13023	,44247	2,6615	,15337
2,52	1,8322	,05674	,12879	,44057	2,6865	,15242
2,53	1,8354	,05586	,12737	,43856	2,7117	,15148
2,54	1,8386	,05500	,12597	,43662	2,7372	,15055
2,55	1,8417	,05415	,12458	,43469	2,7630	,14963

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,56	1,8448	,05332	,12321	,43277	2,7891	,14871
2,57	1,8479	,05250	,12185	,43085	2,8154	,14780
2,58	1,8510	,05169	,12051	,42894	2,8420	,14691
2,59	1,8541	,05090	,11418	,42705	2,8689	,14601
2,60	1,8572	,05012	,11787	,42517	2,8960	,14513
2,61	1,8602	,04935	,11658	,42330	2,9234	,14426
2,62	1,8632	,04859	,11530	,42143	2,9511	,14339
2,63	1,8662	,04784	,11403	,41957	2,9791	,14253
2,64	1,8692	,04711	,11278	,41772	3,0074	,14168
2,65	1,8721	,04639	,11154	,41589	3,0359	,14083
2,66	1,8750	,04568	,11032	,41406	3,0647	,13999
2,67	1,8779	,04498	,10911	,41224	3,0938	,13916
2,68	1,8808	,04429	,10792	,41043	3,1233	,13834
2,69	1,8837	,04361	,10674	,40863	3,1530	,13752
2,70	1,8865	,04295	,10557	,40684	3,1830	,13671
2,71	1,8894	,04230	,10442	,40505	3,2133	,13591
2,72	1,8922	,04166	,10328	,40327	3,2440	,13511
2,73	1,8950	,04102	,10215	,40151	3,2749	,13432
2,74	1,8978	,04039	,10104	,39976	3,3061	,13354
2,75	1,9005	,03977	,09994	,39801	3,3376	,13276
2,76	1,9032	,03917	,09885	,39627	3,3695	,13199
2,77	1,9060	,03858	,09777	,39454	3,4017	,13123
2,78	1,9087	,03800	,09671	,39282	3,4342	,13047
2,79	1,9114	,03742	,09566	,39111	3,4670	,12972
2,80	1,9140	,03685	,09462	,38941	3,5001	,12897
2,81	1,9167	,03629	,09360	,38771	3,5336	,12823
2,82	1,9163	,03574	,09259	,38603	3,5674	,12750
2,83	1,9220	,03520	,09158	,38435	3,6015	,12678
2,84	1,9246	,03467	,09059	,38268	3,6359	,12605
2,85	1,9271	,03415	,08962	,38102	3,6707	,12534
2,86	1,9197	,03363	,08865	,37937	3,7058	,12463
2,87	1,9322	,03312	,08769	,37773	3,7413	,12393
2,88	1,9348	,03262	,08674	,37610	3,7771	,12323
2,89	1,9373	,03213	,08581	,37448	3,8133	,12254
2,90	1,9398	,03165	,08489	,37286	3,8498	,12185
2,91	1,9423	,03118	,08398	,37125	3,8866	,12117
2,92	1,9448	,03071	,08308	,36965	3,9238	,12049
2,93	1,9472	,03025	,08218	,36806	3,9614	,11982
2,94	1,9497	,02980	,08130	,36648	3,9993	,11916

Продолжение табл. 1

M	λ	$\pi = p/p_0$	$\varepsilon = \rho/\rho_0$	$\tau = T/T_0$	$1/q = A/A_*$	$\frac{A}{A_*} \cdot \frac{p}{p_0}$
2,95	1,9521	,02935	,08043	,36490	4,0376	,11850
2,96	1,9545	,02891	,07957	,36333	4,0763	,11785
2,97	1,9569	,02848	,07872	,36177	4,1153	,11720
2,98	1,9593	,02805	,07788	,36022	4,1547	,11656
2,99	1,9616	,02764	,07705	,35868	4,1944	,11591
3,00	1,9640	,02722	,07623	,35714	4,2346	,11528
3,10	1,9866	,02345	,06852	,34223	4,6573	,10921
3,20	2,0079	,02023	,06165	,32808	5,1210	,10359
3,30	2,0279	,01748	,05554	,31466	5,6287	,09837
3,40	2,0466	,01512	,05009	,30193	6,1837	,09353
3,50	2,0642	,01311	,04523	,28986	6,7896	,08902
3,60	2,0808	,01138	,04089	,27840	7,4501	,08482
3,70	2,0964	,00990	,03702	,26752	8,1691	,08090
3,80	2,1111	,00863	,03355	,25720	8,9506	,07723
3,90	2,1250	,00753	,03044	,24740	9,7990	,07380
4,00	2,1381	,00658	,02766	,23810	10,719	,07059
4,10	2,1505	,00577	,02516	,22925	11,715	,06758
4,20	2,1622	,00506	,02292	,22085	12,792	,06475
4,30	2,1732	,00445	,02090	,21286	13,955	,06209
4,40	2,1837	,00392	,01909	,20525	15,210	,05959
4,50	2,1936	,00346	,01745	,19802	16,562	,05723
4,60	2,2030	,00305	,01597	,19113	18,018	,05500
4,70	2,2119	,00270	,01463	,18457	19,583	,05289
4,80	2,2204	,00240	,01343	,17832	21,264	,05091
4,90	2,2284	,00213	,01233	,17235	23,067	,04904
5,00	2,2361	,00189	,01134	,16667	25,000	,04725
6,00	2,2953	,0 ₃ 633	,00519	,12195	53,180	,03368
7,00	2,3333	,0 ₃ 242	,00261	,09259	104,143	,02516
8,00	2,3591	,0 ₃ 102	,00141	,07246	190,109	,01947
9,00	2,3772	,0 ₄ 474	,0 ₃ 815	,05814	327,189	,01550
10,00	2,3904	,0 ₄ 236	,0 ₃ 495	,04762	535,938	,01263
	2,4495	0	0	0		0

Примечание: запись 0₃633 означает ,000633.

Таблица 2

Функции характеристик годографа двумерного изозентропийного
сверхзвукового потока идеального газа ($k = 1,4$)

ω	α	$\alpha-\omega$	M	ω	α	$\alpha-\omega$	M
0,0	90,000	90,000	1,0000	45,0	21,2068	-23,7932	2,7644
1,0	67,5741	66,5741	1,0818	46,0	20,8297	-25,1703	2,8122
2,0	61,9969	59,9969	1,1326	47,0	20,4594	-26,5406	2,8609
3,0	58,1805	55,1805	1,1769	48,0	20,0956	-27,9044	2,9105
4,0	55,2048	51,2048	1,2177	49,0	19,7318	-29,2620	2,9610
5,0	52,7383	47,7383	1,2565	50,0	19,3865	-30,6135	3,0126
6,0	50,6186	44,6186	1,2938	51,0	19,0408	-31,9592	3,0652
7,0	48,7528	41,7528	1,3300	52,0	18,7005	-33,2995	3,1189
8,0	47,0818	39,0818	1,3655	53,0	18,3657	-34,6343	3,1738
9,0	45,5660	36,5660	1,4004	54,0	18,0360	-35,9640	3,2298
10,0	44,1770	34,1770	1,4349	55,0	17,7112	-37,2888	3,2871
11,0	42,8940	31,8940	1,4692	56,0	17,3911	-38,6089	3,3457
12,0	41,7007	29,7007	1,5032	57,0	17,0757	-39,9243	3,4056
13,0	40,5849	27,5849	1,5371	58,0	16,7646	-41,2354	3,4669
14,0	39,5366	25,5366	1,5709	59,0	16,4579	-42,5421	3,5297
15,0	38,5474	23,5474	1,6047	60,0	16,1552	-43,8448	3,5940
16,0	37,6108	21,6108	1,6385	61,0	15,8564	-45,1436	3,6600
17,0	36,7212	19,7212	1,6725	62,0	15,5615	-46,4385	3,7276
18,0	35,8739	17,8739	1,7065	63,0	15,2703	-47,7297	3,7969
19,0	35,0648	16,0648	1,7406	64,0	14,9826	-49,0174	3,8681
20,0	34,2904	14,2904	1,7750	65,0	14,6983	-50,3017	3,9412
21,0	33,5479	12,5479	1,8095	66,0	14,4174	-51,5826	4,0163
22,0	32,8344	10,8344	1,8443	67,0	14,1396	-52,8604	4,0936
23,0	32,1478	9,1478	1,8793	68,0	13,8650	-54,1350	4,1730
24,0	31,4859	7,4859	1,9146	69,0	13,5934	-55,4066	4,2548
25,0	30,8469	5,8469	1,9503	70,0	13,3247	-56,6753	4,3390
26,0	30,2293	4,2293	1,9862	71,0	13,0587	-57,9413	4,4258
27,0	29,6316	2,6316	2,0226	72,0	12,7955	-59,2045	4,5152
28,0	29,0524	1,0524	2,0593	73,0	12,5349	-60,4651	4,6076
29,0	28,4906	-,5094	2,0964	74,0	12,2768	-61,7232	4,7029
30,0	27,9451	-2,0549	2,1339	75,0	12,0212	-62,9788	4,8014
31,0	27,4149	-3,5851	2,1718	76,0	11,7680	-64,2320	4,9032
32,0	26,8991	-5,1009	2,2103	77,0	11,5170	-65,4830	5,0085

Продолжение табл. 2

ω	α	$\alpha-\omega$	M	ω	α	$\alpha-\omega$	M
33,0	26,3970	-6,6030	2,2492	78,0	11,2683	-66,7317	5,1176
34,0	25,9076	-8,0924	2,2887	79,0	11,0217	-67,9783	5,2306
35,0	25,4304	-9,5696	2,3287	80,0	10,7772	-69,2228	5,3479
36,0	24,9648	-11,0352	2,3693	85,0	9,5837	-75,4163	6,0064
37,0	24,5101	-12,4899	2,4105	90,0	8,4328	-81,5672	6,8190
38,0	24,0657	-13,9343	2,4523	95,0	7,3178	-87,6822	7,8509
39,0	23,6313	-15,3687	2,4947	100,0	6,2330	-93,7670	9,2105
40,0	23,2061	-16,7939	2,5378	105,0	5,1730	-99,8270	11,091
41,0	22,7900	-18,2100	2,5816	110,0	4,1331	-105,8669	13,874
42,0	22,3824	-19,6176	2,6261	115,0	3,1090	-111,8910	18,438
43,0	21,9828	-21,0172	2,6714	120,0	2,0965	-117,9035	27,335
44,0	21,5911	-22,4089	2,7176	125,0	1,0916	-123,9084	52,491
				130,0	,0908	-129,9092	631,03

Таблица 3

Соотношение между параметрами потока идеального газа ($k = 1,4$) на
прямом скачке

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,8929
1,01	,99013	1,02345	1,01669	1,00665	,99999	1,9152
1,02	,98052	1,04713	1,03344	1,01325	,99998	1,9379
1,03	,97115	1,07105	1,05024	1,01981	,99997	1,9610
1,04	,96202	1,09520	1,06709	1,02634	,99994	1,9845
1,05	,95312	1,1196	1,08398	1,03284	,99987	2,0083
1,06	,94444	1,1442	1,10092	1,03931	,99976	2,0325
1,07	,93598	1,1690	1,11790	1,04575	,99962	2,0570
1,08	,92772	1,1941	1,13492	1,05217	,99944	2,0819
1,09	,91965	1,2194	1,15199	1,05856	,99921	2,1072
1,10	,91177	1,2450	1,1691	1,06494	,99892	2,1328
1,11	,90408	1,2708	1,1862	1,07130	,99858	2,1588
1,12	,89656	1,2968	1,2034	1,07764	,99820	2,1851
1,13	,88922	1,3230	1,2206	1,08396	,99776	2,2118
1,14	,88204	1,3495	1,2378	1,09027	,99726	2,2388
1,15	,87505	1,3762	1,2550	1,09657	,99669	2,2661
1,16	,86816	1,4032	1,2723	1,10287	,99605	2,2937
1,17	,86145	1,4304	1,2896	1,10916	,99534	2,3217
1,18	,85488	1,4578	1,3069	1,11544	,99455	2,3499
1,19	,84846	1,4854	1,3243	1,12172	,99371	2,3786
1,20	,84217	1,5133	1,3416	1,1280	,99280	2,4075
1,21	,83601	1,5414	1,3590	1,1343	,99180	2,4367
1,22	,82998	1,5698	1,3764	1,1405	,99073	2,4662
1,23	,82408	1,5984	1,3938	1,1468	,98957	2,4961
1,24	,81830	1,6272	1,4112	1,1533	,98835	2,5263
1,25	,81264	1,6562	1,4286	1,1594	,98706	2,5568
1,26	,80709	1,6855	1,4460	1,1657	,98568	2,5876
1,27	,80165	1,7150	1,4634	1,1720	,98422	2,6187
1,28	,79631	1,7448	1,4808	1,1782	,98268	2,6500
1,29	,79108	1,7748	1,4983	1,1846	,98106	2,6816
1,30	,78596	1,8050	1,5157	1,1909	,97935	2,7135

Продолжение табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,31	,78093	1,8354	1,5331	1,1972	,97758	2,7457
1,32	,77600	1,8661	1,5505	1,2035	,97574	2,7783
1,33	,77116	1,8970	1,5680	1,2099	,97382	2,8112
1,34	,76641	1,9282	1,5854	1,2162	,97181	2,8444
1,35	,7617,5	1,9596	1,6028	1,2226	,96972	2,8778
1,36	,75718	1,9912	1,6202	1,2290	,96756	2,9115
1,37	,75269	2,0230	1,6376	1,2354	,96534	2,9455
1,38	,74828	2,0551	1,6550	1,2418	,96304	2,9798
1,39	,74396	2,0874	1,6723	1,2482	,96065	3,0144
1,40	,73971	2,1200	1,6896	1,2547	,95819	3,0493
1,41	,73554	2,1528	1,7070	1,2612	,95566	3,0844
1,42	,73144	2,1858	1,7243	1,2676	,95306	3,1198
1,43	,72741	2,2190	1,7416	1,2742	,95039	3,1555
1,44	,72345	2,2525	1,7589	1,2807	,94765	3,1915
1,45	,71956	2,2862	1,7761	1,2872	,94483	3,2278
1,46	,71574	2,3202	1,7934	1,2938	,94196	3,2643
1,47	,71198	2,3544	1,8106	1,3004	,93901	3,3011
1,48	,70829	2,3888	1,8278	1,3070	,93600	3,3382
1,49	,70466	2,4234	1,8449	1,3136	,93292	3,3756
1,50	,70109	2,4583	1,8621	1,3202	,92978	3,4133
1,51	,69758	2,4934	1,8792	1,3269	,92658	3,4512
1,52	,69413	2,5288	1,8962	1,3336	,92331	3,4894
1,53	,69073	2,5644	1,9133	1,3403	,91999	3,5279
1,54	,68739	2,6003	1,9303	1,3470	,91662	3,5667
1,55	,68410	2,6363	1,9473	1,3538	,91319	3,6058
1,56	,68086	2,6725	1,9643	1,3606	,90970	3,6451
1,57	,67768	2,7090	1,9812	1,3674	,90615	3,6847
1,58	,67455	2,7458	1,9981	1,3742	,90255	3,7245
1,59	,67147	2,7828	2,0149	1,3811	,89889	3,7645
1,60	,66844	2,8201	2,0317	1,3880	,89520	3,8849
1,61	,66545	2,8575	2,0485	1,3949	,89144	3,8456
1,62	,66251	2,8951	2,0652	1,4018	,88764	3,8866
1,63	,65962	2,9330	2,0820	1,4088	,88380	3,9278
1,64	,65677	2,9712	2,0986	1,4158	,87992	3,9693

Продолжение табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_x/A_y p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,65	,65396	3,0096	2,1152	1,4228	,87598	4,0111
1,66	,65119	3,0482	2,1318	1,4298	,87201	4,0533
1,67	,64847	3,0870	2,1484	1,4369	,86800	4,0954
1,68	,64579	3,1261	2,1649	1,4440	,86396	4,1379
1,69	,64315	3,1654	2,1813	1,4512	,85987	4,1807
1,70	,64055	3,2050	2,1977	1,4583	,85573	4,2238
1,71	,63798	3,2448	2,2141	1,4655	,85155	4,2672
1,72	,63545	3,2848	2,2304	1,4727	,84735	4,3108
1,73	,63296	3,3250	2,2467	1,4800	,84312	4,3547
1,74	,63051	3,3655	2,2629	1,4873	,83886	4,3989
1,75	,62809	3,4062	2,2791	1,4916	,83456	4,4433
1,76	,62570	3,4472	2,2952	1,5019	,83024	4,4880
1,77	,62335	3,4884	2,3113	1,5093	,82589	4,5330
1,78	,62104	3,5298	2,3271	1,5167	,82152	4,5783
1,79	,61875	3,5714	2,3433	1,5241	,81711	4,6238
1,80	,61650	3,6133	2,3592	1,5316	,81268	4,6695
1,81	,61428	3,6554	2,3751	1,5391	,80823	4,7155
1,82	,61209	3,6978	2,3909	1,5466	,80376	4,7618
1,83	,60993	3,7404	2,4067	1,5542	,79926	4,8083
1,84	,60708	3,7832	2,4224	1,5617	,79474	4,8551
1,85	,60570	3,8262	2,4381	1,5694	,79021	4,9022
1,86	,60363	3,8695	2,4537	1,5770	,78567	4,9498
1,87	,60159	3,9130	2,4693	1,5847	,78112	4,9974
1,88	,59957	3,9568	2,4848	1,5924	,77656	5,0453
1,89	,59758	4,0008	2,5003	1,6001	,77197	5,0934
1,90	,59562	4,0450	2,5157	1,6079	,76735	5,1417
1,91	,59368	4,0894	2,5310	1,6157	,76273	5,1904
1,92	,59177	4,1341	2,5463	1,6236	,75812	5,2394
1,93	,58988	4,1790	2,5615	1,6314	,75347	5,2886
1,94	,58802	4,2242	2,5767	1,6394	,74883	5,3381
1,95	,58618	4,2696	2,5919	1,6473	,74418	5,3878
1,96	,58437	4,3152	2,6070	1,6553	,73954	5,4378
1,97	,58258	4,3610	2,6220	1,6633	,73487	5,4880
1,98	,58081	4,4071	2,6369	1,6713	,73021	5,5385

Продолжение табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
1,99	,57907	4,4534	2,6518	1,6794	,72554	5,5894
2,00	,57735	4,5000	2,6666	1,6875	,72088	5,6405
2,01	,57565	4,5468	2,6814	1,6956	,71619	5,6918
2,02	,57397	4,5938	2,6962	1,7038	,71152	5,7434
2,03	,57231	4,6411	2,7109	1,7120	,70686	5,7952
2,04	,57068	4,6886	2,7255	1,7203	,70218	5,8473
2,05	,56907	4,7363	2,7400	1,7286	,69752	5,8997
2,06	,56747	4,7842	2,7545	1,7369	,69284	5,9523
2,07	,56589	4,8324	2,7690	1,7452	,68817	6,0052
2,08	,56433	4,8808	2,7834	1,7536	,68351	6,0584
2,09	,56280	4,9295	2,7977	1,7620	,67886	6,1118
2,10	,56128	4,9784	2,8119	1,7704	,67422	6,1655
2,11	,55978	5,0275	2,8261	1,7789	,66957	6,2194
2,12	,55830	5,0768	2,8402	1,7874	,66492	6,2736
2,13	,55683	5,1264	2,8543	1,7960	,66029	6,3280
2,14	,55538	5,1762	2,8683	1,8046	,65567	6,3827
2,15	,55395	5,2262	2,8823	1,8132	,65105	6,4377
2,16	,55254	5,2765	2,8962	1,8219	,64644	6,4929
2,17	,55114	5,3270	2,9100	1,8306	,64185	6,5484
2,18	,54976	5,3778	2,9238	1,8393	,63728	6,6042
2,19	,54841	5,4288	2,9376	1,8481	,63270	6,6602
2,20	,54706	5,4800	2,9512	1,8569	,62812	6,7163
2,21	,54572	5,5314	2,9648	1,8657	,62358	6,7730
2,22	,54440	5,5831	2,9783	1,8746	,61905	6,8299
2,23	,54310	5,6350	2,9918	1,8835	,61453	6,8869
2,24	,54182	5,6872	3,0052	1,8924	,61002	6,9442
2,25	,54055	5,7396	3,0186	1,9014	,60554	7,0018
2,26	,53929	5,7922	3,0319	1,9104	,60106	7,0597
2,27	,53805	5,8451	3,0452	1,9194	,59659	7,1178
2,28	,53683	5,8982	3,0584	1,9285	,59214	7,1762
2,29	,53561	5,9515	3,0715	1,9376	,58772	7,2348
2,30	,53441	6,0050	3,0846	1,9468	,58331	7,2937
2,31	,53322	6,0588	3,0976	1,9560	,57891	7,3529
2,32	,53205	6,1128	3,1105	1,9652	,57452	7,4123

Продолжение табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
2,33	,53089	6,1670	3,1234	1,9745	,57015	7,4720
2,34	,52974	6,2215	3,1362	1,9838	,56580	7,5319
2,35	,52861	6,2762	3,1490	1,9931	,56148	7,5920
2,36	,52749	6,3312	3,1617	2,0025	,55717	7,6524
2,37	,52638	6,3864	3,1743	2,0119	,55288	7,7131
2,38	,52528	6,4418	3,1869	2,0213	,54862	7,7741
2,39	,52419	6,4974	3,1994	2,0308	,54438	7,8354
2,40	,52312	6,5533	3,2119	2,0403	,54015	7,8969
2,41	,52206	6,6094	3,2243	2,0499	,53594	7,9587
2,42	,52100	6,6658	3,2366	2,0595	,53175	8,0207
2,43	,51996	6,7224	3,2489	2,0691	,52758	8,0830
2,44	,51894	6,7792	3,2611	2,0788	,52344	8,1455
2,45	,51792	6,8362	3,2733	2,0885	,51932	8,2083
2,46	,51691	6,8935	3,2854	2,0982	,51521	8,2714
2,47	,51592	6,9510	3,2975	2,1080	,51112	8,3347
2,48	,51493	7,0088	3,3095	2,1178	,50704	8,3983
2,49	,51395	7,0668	3,3214	2,1276	,50303	8,4622
2,50	,51299	7,1250	3,3333	2,1375	,49902	8,5262
2,51	,51204	7,1834	3,3451	2,1474	,49502	8,5904
2,52	,51109	7,2421	3,3569	2,1574	,49104	8,6549
2,53	,51015	7,3010	3,3686	2,1674	,48709	8,7198
2,54	,50923	7,3602	3,3802	2,1774	,48317	8,7850
2,55	,50831	7,4196	3,3918	2,1875	,47927	8,8505
2,56	,50740	7,4792	3,4034	2,1976	,47540	8,9162
2,57	,50651	7,5391	3,4149	2,2077	,47155	8,9821
2,58	,50562	7,5992	3,4263	2,2179	,46772	9,0482
2,59	,50474	7,6595	3,4376	2,2281	,46391	9,1146
2,60	,50387	7,7200	3,4489	2,2383	,46012	9,1813
2,61	,50301	7,7808	3,4602	2,2486	,45636	9,2481
2,62	,50216	7,8418	3,4714	2,2589	,45262	9,3154
2,63	,50132	7,9030	3,4825	2,2693	,44891	9,3829
2,64	,50048	7,9645	3,4936	2,2797	,44522	9,4507
2,65	,49965	8,0262	3,5047	2,2901	,44155	9,5187
2,66	,49883	8,0882	3,5157	2,3006	,43791	9,5869

Продолжение табл. 3

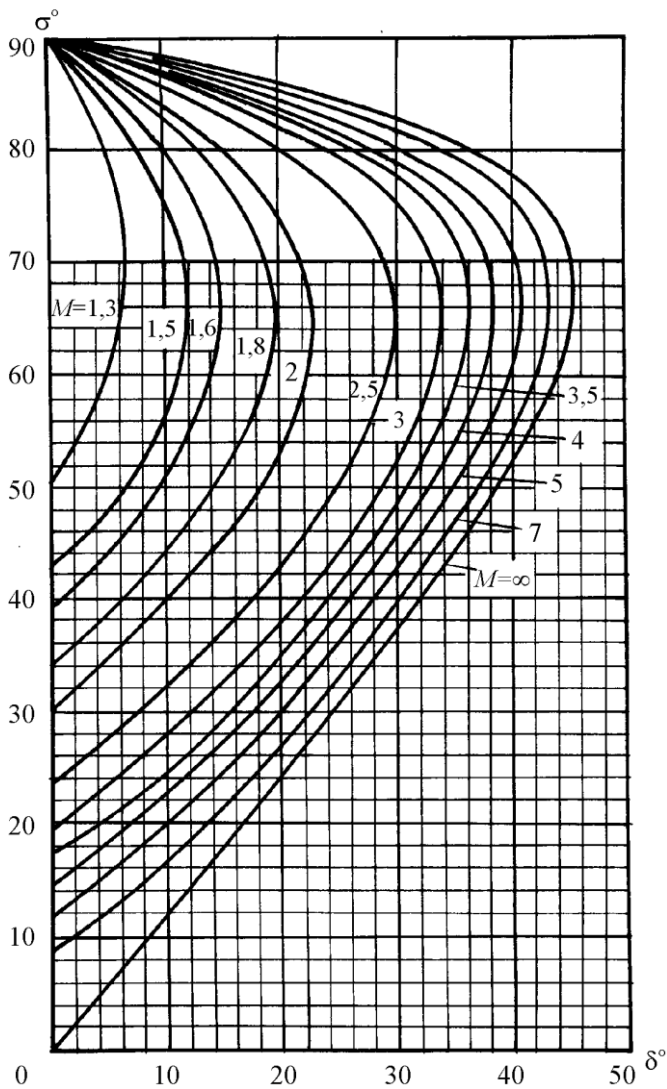
M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
2,67	,49802	8,1504	3,5266	2,3111	,43429	9,6553
2,68	,49722	8,2128	3,5374	2,3217	,43070	9,7241
2,69	,49642	8,2754	3,5482	2,3323	,42713	9,7932
2,70	,49563	8,3383	3,5590	2,3429	,42359	9,8625
2,71	,49485	8,4014	3,5697	2,3536	,42007	9,9320
2,72	,49408	8,4648	3,5803	2,3643	,41657	10,0017
2,73	,49332	8,5284	3,5909	2,3750	,41310	10,0718
2,74	,49256	8,5922	3,6014	2,3858	,40965	10,1421
2,75	,49181	8,6562	3,6119	2,3966	,40622	10,212
2,76	,49107	8,7205	3,6224	2,4074	,40282	10,283
2,77	,49033	8,7850	3,6328	2,4183	,39945	10,354
2,78	,48960	8,8497	3,6431	2,4292	,39610	10,426
2,79	,48888	8,9147	3,6533	2,4402	,39276	10,498
2,80	,48817	8,9800	3,6635	2,4512	,38946	10,569
2,81	,48746	9,0454	3,6737	2,4622	,38618	10,641
2,82	,48676	9,1111	3,6837	2,4733	,38293	10,714
2,83	,48607	9,1770	3,6939	2,4844	,37970	10,787
2,84	,48538	9,2432	3,7039	2,4955	,37649	10,860
2,85	,48470	9,3096	3,7139	2,5067	,37330	10,933
2,86	,48402	9,3762	3,7238	2,5179	,37013	11,006
2,87	,48334	9,4431	3,7336	2,5292	,36700	11,080
2,88	,48268	9,5102	3,7434	2,5405	,36389	11,154
2,89	,48203	9,5775	3,7532	2,5518	,36080	11,228
2,90	,48138	9,6450	3,7629	2,5632	,35773	11,302
2,91	,48074	9,7127	3,7725	2,5746	,35469	11,377
2,92	,48010	9,7808	3,7821	2,5860	,35167	11,452
2,93	,47946	9,8491	3,7919	2,5975	,34867	11,527
2,94	,47883	9,9176	3,8012	2,6090	,34570	11,603
2,95	,47821	9,9863	3,8106	2,6206	,34275	11,679
2,96	,47760	10,055	3,8200	2,6322	,33982	11,755
2,97	,47699	10,124	3,8294	2,6438	,33692	11,831
2,98	,47638	10,194	3,8387	2,6555	,33404	11,907
2,99	,47578	10,263	3,8479	2,6672	,33118	11,984
3,00	,47519	10,333	3,8571	2,6790	,32834	12,061

Продолжение табл. 3

M_x	M_y	p_y/p_x	V_x/V_y ρ_y/ρ_x	T_y/T_x	A_{*x}/A_{*y} p_{0y}/p_{0x}	p_{0y}/p_x
3,50	,45115	14,125	4,2608	3,3150	,21295	16,242
4,00	,43496	18,500	4,5714	4,0469	,13276	21,068
4,50	,42355	23,458	4,8119	4,8751	,09170	26,539
5,00	,41523	29,000	5,0000	5,8000	,06172	32,654
6,00	,40416	41,833	5,2683	7,9406	,02965	46,815
7,00	,39736	57,000	5,4444	10,469	,01535	63,552
8,00	,39289	74,500	5,5652	13,387	,00849	82,865
9,00	,38980	94,333	5,6512	16,693	,00496	104,753
10,00	,38757	116,500	5,7143	20,388	,00304	129,217
∞	,37796	∞	6,0000	∞	0	∞

Диаграмма 1

Зависимость σ от δ и M для $k=1,40$



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные условные обозначения	5
Введение	6
ГЛАВА 1. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗА...	9
1.1. Определение жидкости. Концепция непрерывности	9
1.2. Свойства сплошности	10
1.3. Системы и контрольные объёмы	19
1.4. Скалярные, векторные и тензорные поля в гидрогазо- динамике.	20
1.5. Связь между элементами напряжений и соответст- вующими скоростями деформаций	22
ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	28
2.1. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности движения	28
2.2. Теорема импульсов. Уравнение количества движения	36
2.3. Уравнения движения	39
2.4. Первый закон термодинамики для контрольного объёма. Уравнение сохранения энергии	43
2.5. Второй закон термодинамики	49
ГЛАВА 3. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА	55
3.1. Скорость звука	55
3.2. Различные формы уравнения энергии	59
3.3. Газодинамические функции одномерного адиабатического потока	63
3.4. Классификация течения сжимаемой жидкости	70
3.5. Основы физического моделирования	71

3.6. Одномерные течения при различных внешних воздействиях.....	75
ГЛАВА 4. ДВУХ И ТРЁХМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ	
ЖИДКОСТИ.....	94
4.1. Безвихревое движение жидкости. Потенциал скоростей и функция тока.....	94
4.2. Примеры простейших потенциальных потоков идеальной несжимаемой жидкости и их наложение. Теорема Н.Е. Жуковского	105
4.3. Применение теории функций комплексного переменного к изучению плоскопараллельного потока идеальной жидкости	121
4.4. Метод конформного преобразования.....	132
4.5. Графический метод построения профилей Н.Е. Жуковского-С.А. Чаплыгина. Теорема Жуковского-Чаплыгина о результирующей силе давления.....	142
4.6. Основы теории вихрей. Основные теоремы вихревого течения идеальной жидкости	151
4.7. Общее уравнение для потенциала скоростей	162
ГЛАВА 5. ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ	
СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	166
5.1. Распространение возмущений в газе при движении в нём материальной точки.....	166
5.2. Число Маха и угол Маха.....	170
5.3. Критическое значение числа Маха. Скачки уплотнения в газовом потоке	170
ГЛАВА 6. ПЛОСКОЕ ДО- И СВЕРХЗВУКОВОЕ	
ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ	177
6.1. Суть метода линеаризации	177

6.2. Линеаризация уравнения для потенциала скоростей	178
6.3. Линеаризованное уравнение Бернулли	184
6.4. Двухмерный дозвуковой поток с малыми возмущениями	185
6.5. Двухмерный сверхзвуковой поток с малыми возмущениями	189
ГЛАВА 7. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА	203
7.1. Описание метода характеристик	203
7.2. Течение Прандтля-Майера. Использование характеристик годографа. Единичные процессы	217
7.3. Примеры применения метода характеристик	228
ГЛАВА 8. СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ	236
8.1. Основные уравнения косо́го скачка уплотнения	238
8.2. Прямой скачок уплотнения. Правила взаимодействия скачков	246
8.3. Ударные поляры	251
8.4. Некоторые специфические аспекты косых скачков ..	255
8.5. Потери в скачках уплотнения	266
8.6. Отражение и взаимодействие скачков	273
8.7. Примеры двухмерных течений, содержащих скачки ..	284
ГЛАВА 9. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ	293
9.1. Дифференциальные уравнения пограничного слоя ..	295
9.2. Интегральное соотношение пограничного слоя	304
9.3. Расчёт ламинарного, турбулентного и смешанного пограничного слоя для плоской пластинки	308
9.4. Пограничный слой на криволинейной поверхности ..	324

9.5. Пограничный слой при больших скоростях.	
Взаимодействие скачков с пограничным слоем	330
ГЛАВА 10. ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ СУЖИВАЮЩИХСЯ	
СОПЕЛ И ОТВЕРСТИЙ. СОПЛА ЛАВАЛЯ.....	339
10.1. Суживающиеся сопла	339
10.2. Истечения газа из отверстия с острой кромкой.	
Второе критическое отношение давления.....	341
10.3. Сопла Лаваля	345
10.4. Сверхзвуковое сопло с косым срезом	349
ГЛАВА 11. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ РЕШЕТКИ	
ТУРБОМАШИН.....	353
11.1. Классификация решеток турбомашин	353
11.2. Силы, действующие на профиль в решётке.	
Теорема Н.Е. Жуковского для решётки	354
11.3. Обтекание решёток из произвольных профилей	361
11.4. Расчёт потенциального потока в решётках по	
теории канала	368
11.5. Профилирование дозвуковых профилей	374
11.6. Структура потока в реактивных решётках	
при околосзвуковых и сверхзвуковых скоростях	376
11.7. Профилирование сверхзвуковых профилей.....	378
Список литературы	384
Приложения.....	385

Навчальне видання

БОЙКО Анатолій Володимирович

Гідрогазодинаміка

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск І.Д. Усачьов

У авторській редакції

Компьютерный набор и верстка Дженюк Н.В.

План 200 __, поз. __ / ____

Підп. до друку _____ Формат 60x84 1/16 Папір газетн.

Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.

Обл.-вид.арк. ____ . Тираж 300 прим. Зам. № ____ . Ціна договірна.

Свідоцтво про реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000

Видавничий центр НТУ “ХПІ”. 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ “ХПІ

61002 Харків, вул. Фрунзе, 21